This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

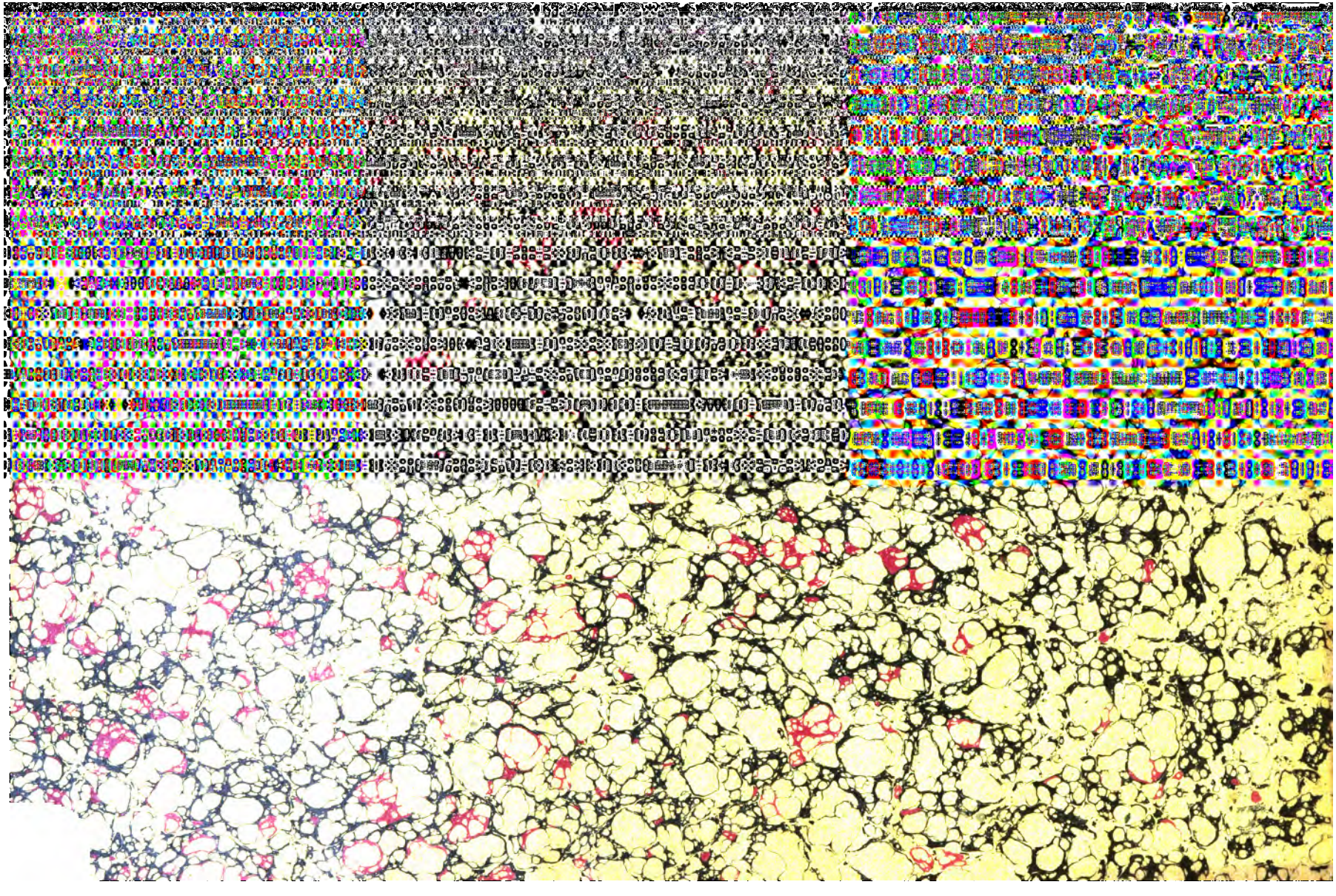
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

T SCIENCE LIBRARY

ook is
GILE
with permission.
le with care
staff member
tocopying.

elp in preserving
rary collections.



[redacted]

[redacted] RECHNUNG

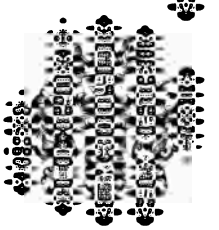
[redacted] EINFACHEN

[redacted] TERRICHT

[redacted] INGENIEURE

[redacted] GEBRAUCH,

[redacted] lithographirten Tafeln.



[redacted] B. G. TEUBNER.

Eng 718.73.3

HARVARD UNIVERSITY
SCHOOL OF ENGINEERING

JUN 20 1917
TRANSFERRED TO
HARVARD COLLEGE LIBRARY

66.47

VORWORT.

Im vorliegenden Buche übergeben wir dem mathematischen und technischen Publikum eine vollständige analytische Theorie der geradlinigen Träger. Eine solche hat bis jetzt gefehlt. Alle bekannten Theorien sind an Voraussetzungen in Bezug auf Belastungsart und Oeffnungszahl geknüpft, sie behandeln eine Anzahl spezieller Fälle. Die interessantesten Eigenschaften der Träger, wie sie sich hier im zweiten Abschnitt zeigen, bleiben ganz oder grösstentheils unermittelt. — Die folgende Theorie gilt von 1 bis ∞ vielen Oeffnungen und für alle Arten gesetzmässig oder gesetzlos vertheilter und concentrirter Lasten. Die Gleichungen für Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt werden ebenfalls und ohne irgend welche Beschränkung der Belastungsart abgeleitet. Sämmtliche Formeln haben mathematische Genauigkeit und sind bei definirter Belastung frei von Integralen.

Das Werkchen zerfällt in vier Abschnitte. Der erste enthält die Ableitung der Hauptformeln, welche für alle continuirlichen und einfachen Träger und bei jeder Art Belastung Gültigkeit behalten. Je nach der Belastungsart nehmen nur die in den Gleichungen vorkommenden Summenausdrücke (Σ) besondere Werthe an. Bei Entwicklung der Formeln ist von wesentlicher Bedeutung die Werthermittelung einiger bestimmter Integrale. Sie ist im Anhang gegeben.

Im zweiten Abschnitt wird der Unsicherheit in Betreff des wechselnden Einflusses der Lasten (mit Veränderung der Angriffspunkte) durch eine exakte Theorie des Orts der Lasten abgeholfen. Dieselbe umfasst auch Sätze über ungünstigste Belastungen mit den Beweisen.

Der dritte Abschnitt gibt den Werth der Summenausdrücke in den allgemeinen Formeln (welch letztere für beliebige Träger konstanten Querschnitts in § 32. zusammengestellt sind) bei den verschiedenen Belastungsarten. Er enthält ausserdem die besonderen Gleichungen für einfache Träger, die aus den allgemeinen Formeln durch Spezialisirung sofort folgen, und dadurch von vielen Beschränkungen emancipirt werden.

Im vierten Abschnitt endlich sind Beispiele zur Erläuterung vorangegangener Resultate und vollständige Berechnungen von Brückenträgern enthalten, wie sie in analogen Fällen als Paradigmen dienen können. Auch werden darin noch solche Eigenschaften betrachtet und Formeln gegeben, welche besonders in praktischer Hinsicht von Wichtigkeit sind.

Beim Studium des Buches wolle man Folgendes beachten. Es empfiehlt sich, nach den einzeln Paragraphen des zweiten Abschnitts die diesen in § 46. besonders zugewiesenen Beispiele anzusehen. Dem praktischen Ingenieur, wenn er nur die Formeln wünscht, genügt der dritte Abschnitt für alle Arten Träger konstanten Querschnitts und bei jeder Belastung; für die gewöhnlichen Fälle wären sogar die §§ 44., 45. allein ausreichend. Die behufs Erzeugung der grössten Momente und Schubkräfte anzunehmenden Belastungsfälle sind dann durch die in den §§ 19., 24., 27., 28. mit gesperrter Schrift gedruckten Gesetze diktirt. Am Schlusse des Buches folgt ein Nachweis angewandter technischer Ausdrücke und eine Zusammenstellung der Buchstabenbezeichnungen, wodurch das Studium einzelner Kapitel für sich und das Formelnlesen erleichtert wird.

Zweckmässige Bezeichnung der auftretenden Grössen ist für complicirtere mathematische Untersuchungen von Wichtigkeit. Wir haben mit Vorliebe solche gewählt, welche sich im praktischen Ingenieurwesen eingebürgert haben, dann von Zeuner und Culmann in ihren Collegien gebrauchte acceptirt, und soviel als möglich nur für neue Begriffe eigne Bezeichnungen eingeführt. Bei dieser Gelegenheit wollen wir uns die Frage erlauben, ob es nicht Sache der nun regelmässig wiederkehrenden Ingenieurversammlungen wäre, ein allgemeines Bezeichnungssystem für die am meisten vorkommenden Grössen aufzustellen. Bis jetzt findet man fast in jedem Buche andre Bezeichnungen und der Ueberblick sowie ein gleichzeitiger Gebrauch mehrerer Werke wird dadurch sehr erschwert.

Auf die speziellen Sätze über Fach- und Gittersysteme wurde nicht eingegangen; hier liefern die hervorragenden Arbeiten von Culmann, Schwedler, Ritter, Laisle und Schübler alles Wissenswerthe. — Das Buch dürfte die allgemeine Theorie so enthalten, wie sie sich besonders für unsre technischen Hochschulen eignet, dem Ingenieur wird es in allen einschlagenden schwierigeren Fragen ein willkommenes Hülfsmittel sein.

Berlin, im Juli 1873.

Der Verfasser.

Inhalt.

I. Abschnitt.

Ableitung der Hauptformeln.

Seite

§ 1. Wirkung der Biegung 1
§ 2. Der continuirliche Träger 3
§ 3. Gleichgewicht am Träger 4
§ 4. Die Gleichung der elastigen Linie 5
§ 5. Tangenten der Neigungswinkel über den Stützen 7
§ 6. Momente über den Stützen (Erweiterung der Clapeyronschen Formeln) 8
§ 7. Vertikale Schubkräfte, Stützenreaktionen 9
§ 8. Momente zwischen den Stützen 10
§ 9. Horizontale Schubkräfte 11
§ 10. Schiefe Spannungen 14
§ 11. Richtungen der innern Maximalkräfte. Spannungstrajectorien . . 17
§ 12. Grösste Einsenkung 21
§ 13. Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt 22
§ 14. Träger veränderlichen Querschnitts überhaupt 25
§ 15. Zusammenhang zwischen Formänderung, Momenten und Kräften (Bestimmtheit der Vorzeichen) 26
§ 16. Gültigkeit der Hauptformeln des I. Abschnitts 28
a) Die Elemente desselben Querschnitts sind nicht homogen.
b) Die Elastizitätsmoduln auf Zugseite und Druckseite sind verschieden.
c) Lose Horizontalschichten.
d) Verzahnte Balken.
e) Bogenförmige Träger. $\frac{ds}{dx}$ ist nicht gleich Null.

II. Abschnitt.

Theorie des Orts der Lasten.

§ 17. Direkte Bestimmung eines verlangten Stützenmoments 35
a) Mittelst Determinanten.
b) Mittelst recurrenter Gleichungen.
§ 18. Einige Eigenschaften der λ-Systeme 37
§ 19. Einfluss der Belastung verschiedener Oeffnungen auf irgend ein Stützenmoment M_r 40
§ 20. Einfluss verschiedener Stützhöhen auf irgend ein Stützenmoment M_r 43
§ 21. Wirkung einer Einzellast in der Oeffnung l_s. Von l_s verschiedene Oeffnungen 44

Seite

§ 22. Wirkung einer Einzellast in der Oeffnung l_s. Die Oeffnung l_s. . . 47
§ 23. Inflexionspunkte 51
§ 24. Maxima der vertikalen und horizontalen Schubkräfte. Maxima der Stützenreaktionen 53
§ 25. Momente in beliebigen Querschnitten. Positive und negative Beitragsstrecken 56
§ 26. Influenzpunkte 58
§ 27. Maxima der negativen Momente in beliebigen Querschnitten . . 60
§ 28. Maxima der positiven Momente in beliebigen Querschnitten . . . 62
§ 29. Ungünstigste Belastungen 64
§ 30. Gültigkeit der Formeln und Sätze des II. Abschnitts 65

III. Abschnitt.

Specielle Belastungsarten. Einfache Träger im Besonderen.

§ 31. Belastungsarten und Belastungsfälle 67
§ 32. Träger mit beliebiger Belastung 68
§ 33. Concentrirte Lasten allein 69
§ 34. Gesetzmässig vertheilte Lasten allein 70
§ 35. Gleichmässig vertheilte Lasten allein 71
§ 36. Combinirte Belastungen 72
§ 37. Unbelastete Stäbe. Ursache des Einflusses verschiedener Stützhöhen 73
§ 38. Einfache Träger 75
§ 39. Einfache Träger. Beide Enden eingespannt 76
§ 40. Einfache Träger. Beide Enden frei aufliegend 79
§ 41. Einfache Träger. Ein Ende eingespannt, das andre frei aufliegend 81
§ 42. Einfache Träger. Ein Ende eingespannt, das andre frei schwebend 82
§ 43. Einfache Träger. Unterstützung in 2 beliebigen Punkten . . . 83
§ 44. Einfache Träger. Formelntafeln 85
a) Gerade Träger mit horizontal eingespannten Enden.
b) Gerade Träger mit frei aufliegenden Enden.
c) Verschiedene gleichmässig belastete Träger.
§ 45. Gewöhnlichster Fall bei continuirlichen Trägern. Die Parabel als Momentencurve 89

IV. Abschnitt.

Beispiele, Berechnungen, praktische Gesichtspunkte.

§ 46. Beispiele zur Erläuterung des II. Abschnitts 93
§ 47. Bestimmung der Influenzpunkte, Inflexionspunkte und Grenzpunkte der Beitragsstrecken ohne Aufstellung der λ-Systeme 104
§ 48. Berechnung von Brückenträgern im Allgemeinen 108
§ 49. Berechnung eines continuirlichen Brückenträgers constanten Querschnitts 113
§ 50. Momentenausgleichung durch Aenderung der Stützhöhen 125
§ 51. Berechnung eines continuirlichen Brückenträgers sprungweise veränderlichen Querschnitts 141
§ 52. Ursache des Einflusses veränderlichen Querschnitts. Berechnung staffelförmiger Träger nach den Formeln für constanten Querschnitt

Seite

§ 53. Berechnung eines continuirlichen Brückenträgers mit concentrirten und gleichmässig vertheilten Lasten 144
§ 54. Längenverhältnisse 149
§ 55. Kleine continuirliche Träger. Berechnung eines continuirlichen Trägers mit eingespannten Enden 151
§ 56. Anwendung continuirlicher Träger 154
§ 57. Einfache frei aufliegende Träger. Ungünstigste Stellung eines Systems festverbundener Lastpunkte. Gewöhnlicher Fall 157
§ 58. Einfache frei aufliegende Träger. Ungünstigste Stellung eines Systems festverbundener Lastpunkte. Weitere Fälle 159
§ 59. Beliebige Träger. Ungünstigste Stellung eines Systems festverbundener Lastpunkte 166

Anhang.

§ 60. Integrationen 167

Nachweis angewandter Ausdrücke 173
Erklärung der Buchstabenbezeichnungen 173

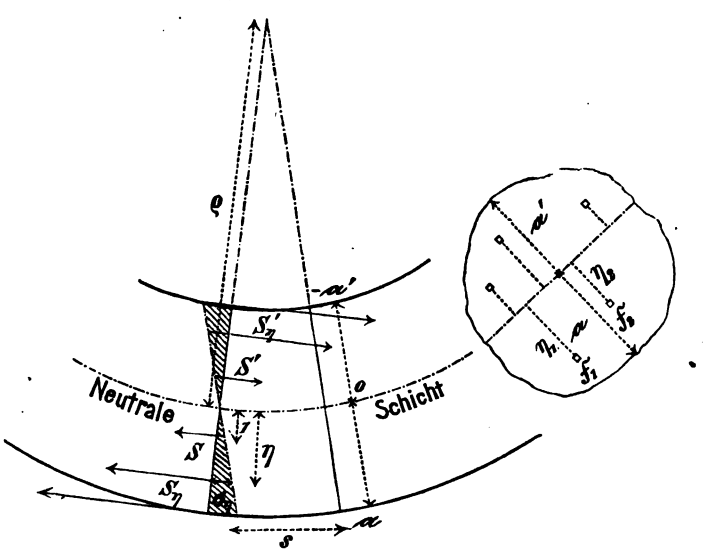
I. Abschnitt.

Ableitung der Hauptformeln.

§ 1. Wirkung der Biegung.

Ein Körper wird gebogen durch Kräfte, welche senkrecht zu seiner Längenrichtung wirken. Die Biegung besteht darin, dass die Faserabschnitte zwischen zwei ursprünglich parallelen Querschnitten theils verlängert, theils verkürzt werden. Beim Uebergang von den verlängerten zu den verkürzten Fasern tritt eine „neutrale Schicht“ auf, die keine Längenänderung, wohl aber eine Formänderung erleidet. Die in der Längenrichtung laufende Schwerlinie der neutralen Schicht ist die „neutrale Achse“; sie heisst nach der Biegung „elastige

Fig. 1.



Linie“. Bei der Biegung treten im Innern des Körpers Spannungen auf, die sich mit den „äussern Kräften“ ins Gleichgewicht setzen müssen, wenn Ruhe eintreten soll. Diese „innern Kräfte“ rühren von der Cohäsion her, welche die Molekules in ihrer ursprünglichen Lage festzuhalten sucht. Welche Richtung dieselben

auch haben mögen, ihre Gesammtheit in jedem bestimmten Querschnitt muss sich ersetzen lassen durch eine Horizontalkraft, eine Vertikalkraft und ein Moment.

Die Biegungslehre geht von der Hypothese aus, dass ein vor Einwirkung der äussern Kräfte angenommener Querschnitt auch nach der Biegung eine Ebene bilde. Es müssen sich dann die Verlängerungen oder Verkürzungen der Faserabschnitte zwischen zwei unendlich benachbarten Querschnitten wie ihre Entfernungen von der neutralen Schicht verhalten. Die Lehre von Zug und Druck zeigt, dass die Ausdehnung oder Zusammenpressung proportional der Kraft; somit ist für Faserelemente vom Querschnitt 1 (Fig.)

1 $$1 : \eta = \sigma : \sigma_\eta = S : S_\eta = S' : S_\eta'$$

Bei Fasern von beliebigen Querschnitten $\mathfrak{F}$ ist die Gesammtheit aller innern Zugkräfte $\sum_0^a S_\eta \mathfrak{F}$, und die Gesammtheit aller innern Druckkräfte $\sum_0^{-a'} S_\eta' \mathfrak{F}$, sodass die Summe aller Horizontalspannungen des Querschnitts überhaupt

$$\sum_0^a S_\eta \mathfrak{F} - \sum_0^{a'} S_\eta' \mathfrak{F}$$

oder wenn $S_\eta' = S_\eta = S\eta$ (1)

2 $$S \sum_0^a \mathfrak{F}\eta - S \sum_0^{a'} \mathfrak{F}\eta = S \sum_{-a'}^{a} \mathfrak{F}\eta$$

Die vertikalen Componenten der Spannungen an den Körperelementen des Querschnitts vereinigen sich zu einer Kraft V_x, welche der Ebene des Schnitts entlang wirkt und die „vertikale Schubkraft“ (scheerende Kraft) heisst. Ihr Moment in Bezug auf den Querschnitt ist 0, während die Horizontalcomponenten ein „Moment der innern Kräfte“ erzeugen, das für den Drehpunkt 0 durch

3 $$M_x = S \sum_{-a'}^{a} \mathfrak{F}\eta^2$$

ausgedrückt ist. Der Werth $\sum_{-a'}^{a} \mathfrak{F}\eta^2$ „das Trägheitsmoment“ wird mit Θ bezeichnet. Ist E der Elastizitätsmodul, dann folgt nach der Lehre von Zug und Druck

$$\sigma : s = S : E$$

und wenn ϱ der Krümmungsradius im betreffenden Querschnitt,

$$\sigma : s = 1 : \varrho$$

Es wird also

4 $$S = \frac{E}{\varrho} \text{ und } M_x = \frac{E\Theta}{\varrho} = \Theta S$$

Die Differenzialrechnung gibt an

$$\varrho = \frac{ds^3}{d^2y \,.\, dx - d^2x \,.\, dy}$$

oder wenn x Urvariable, also dx konstant, $d^2x = 0$, wenn ferner

der Quotient aus Längendifferenzial und Abscissendifferenzial $\frac{ds}{dx} = 1$ gesetzt werden darf:

$$\varrho = -\frac{dx^2}{d^2y}$$

Durch Substitution dieses Werthes in 4 erhält man nun

$$5 \qquad M_x = -E\Theta\frac{d^2y}{dx^2}$$

Dies ist die Fundamentalgleichung der Biegung. Sie gilt für ganz beliebige einfach gebogene Körper, homogen oder heterogen, regelmässig oder nicht, so lange nur der Elastizitätsmodul in jedem Querschnitt für sich konstant und $\frac{ds}{dx} = 1$ gesetzt werden kann.

§ 2. Der continuirliche Träger.

Ein „continuirlicher Träger" ist ein Körper, welcher in einer beliebigen Anzahl, in einer Vertikalebene liegender Punkte unterstützt ist, und auf welchen vertikale Kräfte („Lasten") wirken. Die Endstützen heissen „Widerlager", die Zwischenstützen „Pfeiler", die Abschnitte zwischen den einzeln Stützen „Oeffnungen". Alle Arten „einfacher Träger" sind besondere Fälle des continuirlichen Trägers, der ebensogut eine, wie 2, 3 bis ∞ viele Oeffnungen haben kann. Die Verhältnisse der erstern lassen sich also aus den Relationen des letztern durch Spezialisirung ableiten. Die Lasten greifen in gewissen Punkten an. Diese können um messbare Strecken von einander entfernt liegen („concentrirte Lasten") oder eine stetige Folge bilden (stetig vertheilte oder kurzweg „vertheilte Lasten").

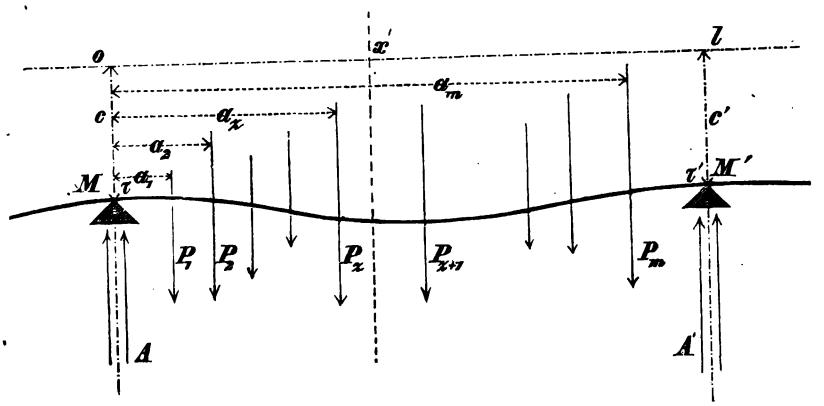
Die Theorie der continuirlichen Träger setzt voraus, dass die neutrale Achse in die Vertikalebene der Stützpunkte falle, wodurch die elastige Linie eine Curve einfacher Krümmung wird; sie verlangt ferner, dass die Höhendifferenz zweier aufeinander folgender Stützpunkte im Vergleich zu ihrer Entfernung klein sei; sie nimmt schliesslich an, dass die elastige Linie nur wenig von einer Geraden abweiche; die beiden letzten Bedingungen in dem Maasse, dass $\frac{ds}{dx} = 1$ gesetzt werden kann. Asdann gilt auch für continuirliche Träger die Formel

$$5 \qquad M_x = -E\Theta\frac{d^2y}{dx^2}$$

§ 3. Gleichgewicht am Träger.

Man betrachte irgend eine Oeffnung l eines Trägers. Oberhalb desselben ist eine Horizontale als Abscissenachse angenommen, von welcher die l begrenzenden Stützpunkte um c, c' entfernt sind. Ursprung der Coordinaten bei der linken Stütze, daselbst unveränderlich $y = c$. Der Träger ist auf seiner ganzen Länge willkürlich belastet und es herrscht vollständiger Gleichgewichtszustand. Die elastige Linie hat hiebei eine solche Form angenommen, dass die Tangenten der Neigungswinkel für $x = o$ und $x = l$ $\tau = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ und $\tau' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}$ sind.

Fig. 2.



Wir nehmen in l einen beliebigen Schnitt x an. Zwischen o und x wirken in Entfernungen a_1, a_2, . . . von der Stütze o die Lasten P_1, P_2, . . . wobei also die P auch Lastelemente sein und die Punkte a stetig auf einander folgen können. Alle äussern Kräfte, sowie die Stützenreaktionen, welche links von o und rechts von l bis zu den Trägerenden wirken, kann man sich ohne Störung des Gleichgewichts resp. in o und l zweimal und entgegengesetzt angebracht denken. Es ist alsdann die Summe ihrer Wirkungen für diese Querschnitte je eine resultirende Vertikalkraft und ein resultirendes Kräftepaar. Da Ruhe eingetreten, so sind die Vertikalkräfte durch gleichgrosse Stützenreaktionen aufgehoben, während die Kräftepaare sich mit den Momenten M, M' der innern Kräfte in den Querschnitten o und l ins Gleichgewicht gesetzt haben.

Wie an diesen besondern Stellen, so müssen auch in jedem andern Punkte die innern Widerstände den äussern Kräften und Kräftepaaren das Gleichgewicht halten, und es sind z. B. in dem beliebigen

Querschnitt x die folgenden nothwendigen Voraussetzungen fürs Gleichgewicht erfüllt:

Summe aller Horizontalkräfte gleich 0

6 $$S \sum_{-a}^{a} \mathfrak{F}\eta = 0$$

Summe aller Vertikalkräfte gleich 0

7 $$\sum^{x} P - A - V_x = 0$$

Summe aller Momente gleich 0

8 $$M + Ax - \sum^{x} P(x-a) - S \sum_{-a}^{a} \mathfrak{F}\eta^2 = 0$$

worin $\sum^{x} P$ die Gesammtlast zwischen o und x und $\sum^{x} P(x-a)$ die Summe aller Einzellasten oder Lastelemente von o bis x multiplicirt mit ihren Entfernungen vom Querschnitt x. Aus 6 folgt:

Die Summe aller Horizontalspannungen in den Elementen eines ganzen Querschnitts ist Null.

Weil nun S von o verschieden, so erhellt aus 6 weiter:

Die neutrale Achse geht durch die Schwerpunkte aller Querschnitte.

Gleichung 8 geht für $x = l$ über in

$$M + Al - \sum^{l} P(l-a) - M' = 0$$

daher

9 $$A = \frac{1}{l}\left[M' - M + \sum^{l} P(l-a)\right]$$

Für das Moment der innern Kräfte in einem beliebigen Querschnitt x haben wir nun aus 8 mit der Bezeichnung 3 und in 5 die beiden Gleichungen

10 $$M_x = M + Ax - \sum^{x} P(x-a)$$

5 $$M_x = -E\Theta\frac{d^2y}{dx^2}$$

Alle bis jetzt abgeleiteten Formeln gelten für jeden continuirlichen und einfachen Träger, der die in § 2. gestellten Bedingungen erfüllt, Elastizitätsmodul und Trägheitsmoment können in jedem Querschnitt verschieden sein.

§ 4. Die Gleichung der elastigen Linie.

Die Gleichung der elastigen Linie kann jetzt aufgestellt werden. Es folgt aus (5)

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_x}{E\Theta}$$

$$\frac{dy}{dx} + \text{const.} = -\int_0^x \frac{M_x}{E\Theta}\, dx$$

und da für $x = 0$ $\frac{dy}{dx} = \tau$, also const. $= -\tau$

11 $$\frac{dy}{dx} = \tau - \int_0^x \frac{M_x}{E\Theta}\, dx$$

Durch nochmalige Integration wird

$$y + \text{const.} = \tau x - \int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{E\Theta}\, dx$$

aber für $x = 0$ $y = c$, somit

12 $$y = c + \tau x - \int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{E\Theta}\, dx$$

worin M_x durch 10 bestimmt. Dies ist die allgemeinste Gleichung der elastigen Linie. Man hat Trägheitsmoment und Elastizitätsmodul als Functionen von x einzusetzen und dann die Integrale auszuführen.

Die Formeln für continuirliche Träger mit veränderlichem E und Θ sollen, insoweit sie von den für konstante Werthe derselben gültigen abweichen, in speziellen Kapiteln (§§ 13., 14.) gegeben werden. Wir betrachten also zunächst continuirliche Träger, welche wenigstens auf die Länge je einer Oeffnung homogen und von konstantem Querschnitt sind.

Wenn E und Θ konstant, so folgt durch Substitution von 10 in 11

$$\frac{dy}{dx} = \tau - \frac{M}{E\Theta}\, x - \frac{A}{2E\Theta}\, x^2 + \frac{1}{E\Theta} \int_0^x \sum^x P(x-a)\, dx$$

Die Ableitung des Integrals der Summe ist mit den Werthbestimmungen einiger in der Folge auftretenden Integrale im Anhang am Schlusse des Buches zusammengestellt. Nach Einsetzen vom Anh. 2 wird

13 $$\frac{dy}{dx} = \tau - \frac{1}{2E\Theta}\left[\, 2\,Mx + Ax^2 - \sum^x P(x-a)^2 \right]$$

Die Integration dieser Gleichung liefert mit Rücksicht auf 12

$$y = c + \tau x - \frac{M}{2E\Theta} x^2 + \frac{A}{6E\Theta} x^3 + \frac{1}{2E\Theta} \int_0^x \sum^x P(x-a)^2 \, dx$$

und mit Einsetzen des Werthes Anh. 3

14 $$y = c + \tau x - \frac{1}{6E\Theta} \left[3Mx^2 + Ax^3 - \sum^x P(x-a)^3 \right]$$

als Gleichung der elastigen Linie in Oeffnungen mit konstantem E und Θ bei ganz willkürlicher Belastung. Die Curve verläuft stetig, doch ändert sich das Curvengesetz unter jeder concentrirten Last und überall da, wo sich bei stetig vertheilten Lasten das Gesetz der Vertheilung ändert, — so zwar, dass die in solchen Punkten zusammenhängenden Curventheile daselbst eine gemeinschaftliche Tangente haben.

§ 5. Tangenten der Neigungswinkel über den Stützen.

Da für $x = l$ $y = c'$, so folgt aus 14

$$c' = c + \tau l - \frac{M}{2E\Theta} l^2 - \frac{A}{6E\Theta} l^3 + \frac{\sum^l P(l-a)^3}{6E\Theta}$$

und indem man den Werth von A aus 9 einsetzt und reduzirt

$$c' = c + \tau l - \frac{l^2}{6E\Theta} (M' + 2M) - \frac{1}{6E\Theta} \sum^l Pa(l-a)(2l-a)$$

Weil aber auch für $x = l$ $\frac{dy}{dx} = \tau'$, so gibt die Gleichung 13 mit Einführung des Werthes A nach Reduktion

$$\tau' = \tau - \frac{M + M'}{2E\Theta} l - \frac{\sum^l Pa(l-a)}{2E\Theta}$$

Aus der Gleichung für c' findet sich der Werth von τ und wenn man diesen in die letzte Gleichung substituirt, entsteht eine analoge Formel für τ'. Die beiden Ausdrücke lauten:

15 $$\tau = \frac{c' - c}{l} + \frac{1}{6E\Theta} \left[M' l + 2Ml + \frac{1}{l} \sum^l Pa(l-a)(2l-a) \right]$$

16 $$\tau' = \frac{c' - c}{l} - \frac{1}{6E\Theta} \left[Ml + 2M' l + \frac{1}{l} \sum^l Pa(l-a)(l+a) \right]$$

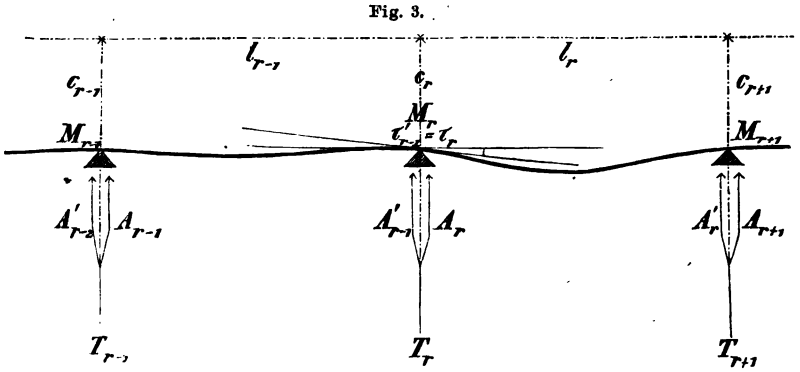
Diese Formeln gelten dann, wenn Trägheitsmoment und Elastizitätsmodul innerhalb jeder Oeffnung für sich als konstant anzunehmen sind. Ueber jeder Stütze r ist $\tau'_{r-1} = \tau_r$ und die Anzahl der Gleichungen genügt, um sämmtliche Stützenmomente in ganz analoger Weise zu bestimmen, wie dies in § 6. für den wichtigsten Fall gezeigt werden soll.

§ 6. Momente über den Stützen.

(Erweiterung der Clapeyron'schen Formeln.)

Es sei jetzt ein vollständiger Träger, homogen und mit konstantem Querschnitt auf der ganzen Länge gegeben. Entfernung, Anzahl und Höhenlage der Stützen, Grösse und Ort der concentrirten und gesetzmässig oder gesetzlos vertheilten Lasten in allen Oeffnungen sind beliebig. Die Indices werden in der auf Taf. IV, 2 ersichtlichen Weise gegeben, $\sum_r P$ soll die Summe aller Lasten und Lastelemente (d. h. $\sum_i P$) in der Oeffnung l_r bezeichnen. Dann hat man für die Tangente des Neigungswinkels der elastigen Linie über Stütze r (Fig. 3), wenn dieselbe zuerst als τ' der Oeffnung l_{r-1} und dann als τ der Oeffnung l_r betrachtet wird, nach 16 und 15

Fig. 3.



$$\tau'_{r-1} = \frac{c_r - c_{r-1}}{l_{r-1}} - \frac{1}{6E\Theta}\left[M_{r-1}l_{r-1} + 2M_r l_{r-1} + \frac{1}{l_{r-1}}\sum_{r-1} Pa(l-a)(l+a)\right]$$

$$\tau_r = \frac{c_{r+1} - c_r}{l_r} + \frac{1}{6E\Theta}\left[M_{r+1}l_r + 2M_r l_r + \frac{1}{l_r}\sum_{r} Pa(l-a)(2l-a)\right]$$

woraus nach Gleichsetzung und Transformation

$$17 \quad M_{r-1}l_{r-1} + 2M_r(l_{r-1} + l_r) + M_{r+1}l_r = -\left[\frac{c_{r-1}-c_r}{l_{r-1}} + \frac{c_{r+1}-c_r}{l_r}\right] 6E\Theta - \frac{1}{l_{r-1}}\sum_{r-1} Pa(l-a)(l+a) - \frac{1}{l_r}\sum_{r} Pa(l-a)(2l-a)$$

Diese Gleichung geht in die bekannte Clapeyron'sche Formel über, wenn keine concentrirten Lasten vorhanden sind und die gleichmässig vertheilte Belastung pro Längeneinheit innerhalb jeder Oeffnung konstant ist (§ 45). Aus den Werthen von τ_r, τ'_{r-1} erhält man noch für $r = 0$ resp. $r - 1 = n$.

18 $$2M_0 l_0 + M_1 l_1 = \left[\tau_0 - \frac{c_1 - c_0}{l_0}\right] 6 E\Theta - \frac{1}{l_0} \sum_0 Pa(l-a)(2l-a)$$

19 $$M_n l_n + 2 M_{n+1} l_n = \left[\frac{c_{n+1} - c_n}{l_n} - \tau_{n+1}\right] 6 E\Theta - \frac{1}{l_n} \sum_n Pa(l-a)(l+a)$$

Diese letzten Gleichungen kommen zur Verwendung bei Trägern mit eingespannten Enden. Bei freiaufliegenden Enden gelten dieselben auch noch; dann ist aber $M_0 = 0$, $M_{n+1} = 0$; zur Bestimmung sämmtlicher Stützenmomente genügen ebensoviel Gleichungen von der Form 17 und die Formeln 18, 19 könnten zur Berechnung der nun unbekannten τ_0, τ_{n+1} verwandt werden.

§ 7. Vertikale Schubkräfte, Stützenreaktionen.

Nach Gleichung 7 ist die vertikale Schubkraft im Querschnitt x

7 $$V_x = \sum^x P - A$$

Diese Kraft sucht die beiden in x zusammenhängenden Querschnittsflächen scheerend zu trennen, und man erkennt, dass sie ihre grössten absoluten Werthe erreichen kann unmittelbar nach der linken und vor der rechten Stütze, nämlich nach Einsetzen von 9

20 $$V_0 = -A = \frac{1}{l}\left[M - M' - \sum^l P(l-a)\right]$$

21 $$V_l = A' = \frac{1}{l}\left[M - M' + \sum^l Pa\right]$$

Subtrahirt man 20 von 21, so folgt

22 $$V_l - V_0 = A' + A = \sum^l P$$

d. h. die Zunahme der Reaktionen zweier eine Oeffnung begrenzender Stützen durch Belastung innerhalb der Oeffnung ist gleich der Grösse dieser Belastung.

Für einen Träger mit n Zwischenstützen sind nun die Reaktionen der Widerlager und Pfeiler

23 $$T_0 = A_0, \quad T_{n+1} = A'_n$$

24 $$T_r = A'_{r-1} + A_r$$

Man kann sich stets einen Punkt $x = \mu$ denken, für welchen

25 $$\sum^\mu P = A \text{ sodass } V_\mu = 0$$

Liegt dieser Punkt innerhalb der betrachteten Oeffnung, so ist also in demselben die vertikale Schubkraft gleich 0. Die vertikale Schubkraft in einem beliebigen Querschnitt x ist dann gleich der Summe der Lasten zwischen $x = x$ und $x = \mu$. (7)

Trägt man die vertikalen Schubkräfte als Ordinaten bei ihren respektiven x auf, so erhält man eine Curve, welche ebensoviele Unstetigkeiten enthält als concentrirte Lasten vorhanden sind. Unter

jeder concentrirten Last ist der Sprungwerth gleich der Grösse derselben. Besteht die Belastung aus verschiedenen vertheilten Lasten, so ändert sich das Curvengesetz der V_x überall, wo sich das Gesetz der Vertheilung ändert und die Curve hat in diesen Punkten Ecken. Wäre die Belastung auf die ganze Länge l gleichmässig vertheilt, so erhielte man als Curve der V_x eine geneigte Gerade (Fig. 4), welche bei $x = \mu$ die Abscissenachse schneidet und deren Schnittpunkte mit den Vertikalen in o und l durch $V_0 = -A$ und $V_l = A'$ bestimmt sind.

§ 8. Momente zwischen den Stützen.

Die Gleichung 10 gibt für das Moment im Querschnitt x irgend einer Oeffnung

10 $$M_x = M + Ax - \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)$$

Durch Differenzation wird hieraus

$$\frac{dM_x}{dx} = A - \frac{d\,\overset{x}{\Sigma} P(x-a)}{dx}$$

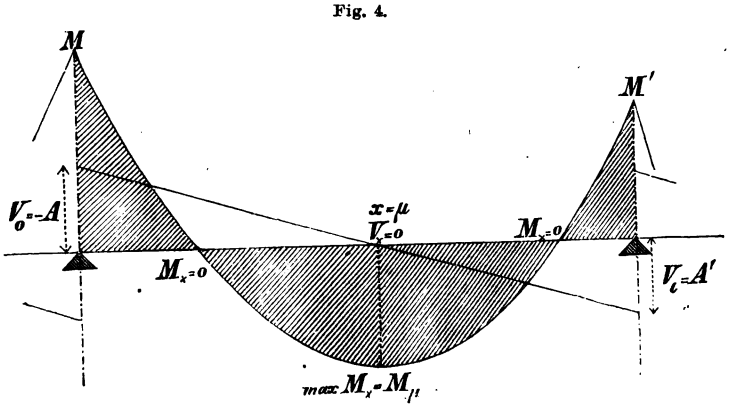
und da nach Anh. 1

$$\frac{d\,\overset{x}{\Sigma} P(x-a)}{dx} = \overset{x}{\Sigma} P,$$

26 $$\frac{dM_x}{dx} = A - \overset{x}{\Sigma} P = -V_x$$

Trägt man also bei den Querschnitten x die zugehörigen Momente M_x als Ordinaten auf, so erhält man eine Curve, deren trigonometrische Tangenten sich wie die vertikalen Schubkräfte in den betreffenden Querschnitten verhalten. Der Curvenzug ist zwar stetig, doch

Fig. 4.



überschlägt die geometrische Tangente bei jeder concentrirten Kraft einen gewissen Raum, für welchen

$$\text{tang. } \omega = \lim_{\delta=0} \left(\frac{dM_x}{dx}\right)_{x=a-\delta}^{x=a+\delta} = P$$

und es existiren soviel Curvenecken als concentrirte Lasten vorhanden sind. Bei vertheilten Lasten ändert sich das Gesetz der Momentencurve auch überall da, wo sich das Gesetz der Vertheilung ändert, aber so, dass zwei in solchen Punkten zusammenhängende Curventheile daselbst eine gemeinschaftliche Tangente haben. Wäre die Belastung auf die ganze Länge l gleichmässig vertheilt, so erhielte man als Curve der M_x eine Parabel (Fig. 4), deren Scheitel bei $x = \mu$ (§ 7.) zu liegen käme, und deren Schnittpunkte mit den Vertikalen in o und l durch $M_0 = M$ und $M_l = M'$ bestimmt sind (§ 45).

In dem Punkte $x = \mu$ ist $V_x = 0$ also M_x ein Maximum oder Minimum. Weil A konstant und alle P-positiv, so ist nach 26 $\frac{dV_x}{dx}$ stets positiv, daher $\frac{d^2M_x}{dx^2}$ immer negativ und M_μ ein Maximum. Hat man aus 25 den Punkt μ gefunden, welcher oft unter einer concentrirten Last liegen wird, dann folgt aus 10

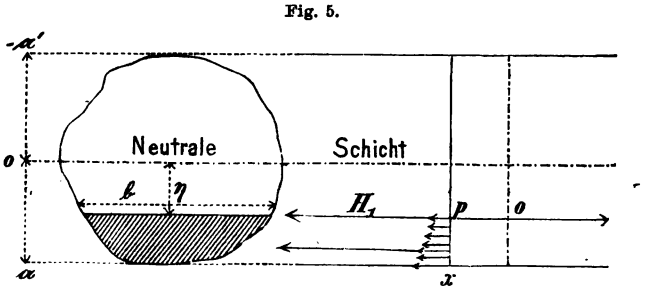
$$27 \qquad M_\mu = M + A\mu - \Sigma^{\mu} P\,(\mu - a)$$

Der Punkt μ heisst „Maximalmomentenpunkt" der Oeffnung l. (Ueber die Bestimmtheit der Vorzeichen siehe § 15.)

§ 9. Horizontale Schubkräfte.

In § 3. wurde gefunden, dass die Summe aller innern Horizontalkräfte für einen ganzen Querschnitt Null ist. Für einen Theil des Querschnitts besteht dafür ein bestimmter Werth. Denkt man sich die einzelnen Horizontalspannungen aller Elemente des schraffirten Querschnitttheils (Fig. 5) in der Schicht $\mathfrak{b}$ gleich und entgegengesetzt angetragen, so wird hierdurch am Gleichgewichtszustand nichts ge-

Fig. 5.



ändert. Es besteht aber jetzt die Summe der Wirkungen dieser Kräfte in einem resultirenden Kräftepaar, welches einen Theil des Moments M_x (3) ausmacht, und in einer Horizontalkraft, welche in der Längenrichtung der Schicht $\mathfrak{b}$ wirkt. Man hat also im Quer-

schnitt x für eine Horizontalschicht in Entfernung η von der neutralen Achse nach § 1. und mit 4

$$H_{'} = S \sum_{\eta}^{a} \mathfrak{F}\eta = \frac{M_{'}}{\Theta} \sum_{\eta}^{a} \mathfrak{F}\eta$$

und für den entsprechenden Theil eines um op entfernten Querschnitts

$$H_{''} = \frac{M_{''}}{\Theta} \sum_{\eta}^{a} \mathfrak{F}\eta$$

Danach wirkt längs op eine Kraft

$$H_{''} - H_{'} = (M_{''} - M_{'}) \frac{\sum_{\eta}^{a} \mathfrak{F}\eta}{\Theta}$$

welche die daselbst zusammenhängenden Horizontalflächen zu verschieben sucht und die man die „horizontale Schubkraft“ nennt. Sind die zwei angenommenen Querschnitte um eine Längeneinheit von einander entfernt, dann heisst $H_{''} - H_{'} = H_\eta$ die „spezifische horizontale Schubkraft“ beim Querschnitt x in Entfernung η von der neutralen Schicht und für die ganze Breite $\mathfrak{b}$. Wenn die beiden Querschnitte nur um dx auseinanderliegen, dann ist $M_{''} - M_{'} = dM_x$ also

$$H_\eta \, dx = dM_x \frac{\sum_{\eta}^{a} \mathfrak{F}\eta}{\Theta}$$

und weil nach 26

$$\frac{dM_x}{dx} = - V_x$$

28 $$H_\eta = - \frac{V_x}{\Theta} \sum_{\eta}^{a} \mathfrak{F}\eta$$

Man ersieht hieraus, dass die spezifische horizontale Schubkraft für einen bestimmten Querschnitt am grössten in der neutralen Schicht, nämlich

29 $$H_0 = - \frac{V_x}{\Theta} \sum_{0}^{a} \mathfrak{F}\eta$$

am kleinsten für $\eta = \mathfrak{a}$ und $\eta = -\mathfrak{a}'$, nämlich

30 $$H_{\mathfrak{a}} = 0 \quad H_{-\mathfrak{a}'} = 0$$

Der absolute Werth von H_η nimmt ferner zu mit V_x, er wächst also vom Maximalmomentenpunkt μ aus, wo $V_x = 0$ und $H_\eta = 0$, nach den Stützen hin.

Bezeichnet man die „spezifische vertikale Schubkraft“, d. h. die vertikale Schubkraft für die Höheneinheit des Querschnitts auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ vorübergehend durch K_η und bedenkt, dass ∞ kleine Aenderungen ∞ kleiner Grössen vernachlässigt werden können, so wirken nun (Fig. 6) auf ein Körperelement $\mathfrak{b} \, . \, dx \, . \, d\eta$ folgende Kräfte:

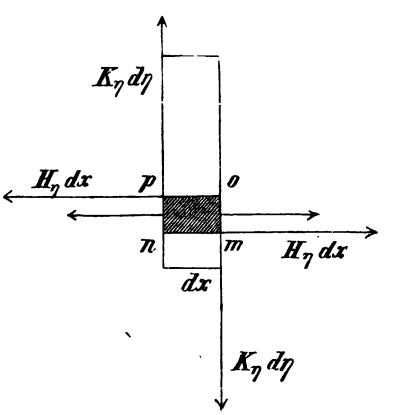
a) Zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte $b\,S_\eta\,d\eta$, welche die Flächen *mo* und *np* in der Längenrichtung auseinander zu reissen oder zusammen zu pressen suchen;

b) zwei gleiche Kräfte $H_\eta\,dx$, welche die Flächen *mn* und *op* horizontal an einander verschieben wollen;

c) zwei gleiche Kräfte $K_\eta\,d\eta$, welche die Flächen *mo* und *np* vertikal gegen einander verschieben wollen.

Lassen wir zunächst die Kräfte unter *a*) ausser Betracht. Die unter *b*) und *c*) aufgeführten bilden je ein Kräftepaar und da Gleichgewicht vorhanden, so muss sein

Fig. 6.



$$H_\eta\,dx\,.\,d\eta = K_\eta\,d\eta\,.\,dx$$

woraus

31 $$K_\eta = H_\eta = -\frac{V_x}{\Theta}\sum_\eta^a \mathfrak{F}\eta$$

d. h. In jedem Punkte eines Trägers ist die spezifische vertikale Schubkraft gleich der spezifischen horizontalen Schubkraft.

In § 3. wurde gezeigt, dass fürs Gleichgewicht $S\sum_{-a}^{a}\mathfrak{F}\eta = 0$, oder dass die Summe aller horizontalen Zugkräfte gleich der Summe aller horizontalen Druckkräfte sei. Es ist dies auch selbstverständlich, da sich beide in der neutralen Schicht das Gleichgewicht halten. Man kann sich nun jede dieser Summen in einem bestimmten Punkte, dem Mittelpunkt der parallelen Kräfte, vereinigt denken, ohne dass ihr Moment sich ändert. Bezeichnet dann $\mathfrak{H}$ die Entfernung dieser „Mittelpunkte von Zug- und Druck“ und

$$Q = S\sum_0^a \mathfrak{F}\eta = S\sum_0^{a'} \mathfrak{F}\eta$$

die numerisch gleichen Kräfte in denselben, so hält das Kräftepaar $Q\mathfrak{H}$ dem Momente M_x der äussern Kräfte das Gleichgewicht; es ist

32 $$M_x = Q\mathfrak{H}$$

Mit Rücksicht auf den Werth von Q und aus 4 folgt nun weiter

$$M_x = \mathfrak{H}\,S\sum_0^a \mathfrak{F}\eta = S\Theta$$

und

33 $$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\sum_0^a \mathfrak{F}\eta}$$

Hierin ist Θ das Moment des ganzen Querschnitts und $\sum_0^a \mathfrak{F}\eta$ das

statische Moment des gezogenen oder gedrückten Theils in Bezug auf die neutrale Schicht.

Sind die Punkte, in welchen Q angreifend gedacht wird, die Schwerpunkte gewisser Bänder (z. B. bei Trägern mit durchbrochenen Wandungen) und liegen dieselben gleichweit um $\frac{\mathfrak{H}_0}{2}$ von der neutralen Achse entfernt, so kann die Beanspruchung Q dieser Bänder (Gurtungen) mittelst

32a $$M_x = Q \cdot \mathfrak{H}_0$$

direkt aus dem Momente an der betreffenden Stelle bestimmt werden.

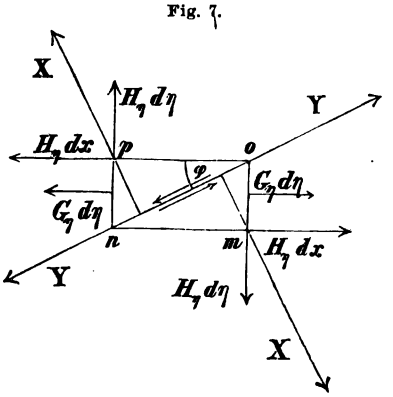
Substituirt man den Werth 33 in Gleichung 29, so folgt für die spezifische horizontale Schubkraft in der neutralen Schicht

34 $$H_0 = -\frac{V_x}{\mathfrak{H}}$$

§ 10. Schiefe Spannungen.

In § 9. wurde gezeigt, dass auf jedes Körperelement $\mathfrak{b}\,dx\,d\eta$ Zug- oder Druckkräfte in horizontaler und Schubkräfte in horizontaler und vertikaler Richtung wirken. Jede dieser Kräfte kann nun durch einfache Anwendung des Parallelogramms der Kräfte nach 2 beliebigen zu einander senkrechten Richtungen zerlegt werden. Zerlegen wir z. B. (Fig. 7) in der Richtung der Diagonale *on* des Körperelements *opnm*, so resultiren 2 Zug- oder Druckkräfte X und 2 Schubkräfte Y. Die X suchen die in *on* zusammenhängenden Flächen auseinander zu reissen oder zusammen zu pressen (ganz wie $G_\eta\,d\eta$ in Bezug auf *om* und *pn*), die Y suchen diese Flächen an einander zu verschieben (ganz wie $H_\eta\,dx$ in Bezug auf *mn* und *op*). Da Verhältniss von $d\eta$ und dx und Richtung von $d\eta$ frei gewählt werden können, wenn nur $d\eta$ das ihm zukommende Vorzeichen (positiv nach der Zugseite) erhält, so haben wir auch dann schon die allgemeinsten Ausdrücke für die Kräfte X, Y, wenn deren Werthe in Bezug auf die Diagonale *on* bekannt sind. Verlangen wir dann später die Kräfte in bestimmter Richtung φ, so machen wir nur von dem uns zustehenden Rechte Gebrauch, die Verhältnisse des Körperelements selbst zu wählen.

Fig. 7.



Es werden alle Spannungen auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ bezogen und bezeichne deshalb auch

35 $$G_\eta = \mathfrak{b} S_\eta = \pm \mathfrak{b}\eta \frac{M_x}{\Theta}$$

wo η auf der Zugseite das obere, auf der Druckseite das untere Vorzeichen erhält und M_x immer ohne Rücksicht auf seinen Drehungssinn positiv einzusetzen ist. Die Zerlegung ergibt

$$X = H_\eta\, dx \sin\varphi + H_\eta\, d\eta \cos\varphi + G_\eta\, d\eta \sin\varphi$$
$$Y = H_\eta\, dx \cos\varphi - H_\eta\, d\eta \sin\varphi + G_\eta\, d\eta \cos\varphi$$

Bedeutet nun X_η die spezifische Zug- oder Druckkraft auf on, Y_η die spezifische Schubkraft längs on und vorübergehend ds die Länge von on, so ist

$$X_\eta = H_\eta \frac{dx}{ds} \sin\varphi + H_\eta \frac{d\eta}{ds} \cos\varphi + G_\eta \frac{d\eta}{ds} \sin\varphi$$

$$Y_\eta = H_\eta \frac{dx}{ds} \cos\varphi - H_\eta \frac{d\eta}{ds} \sin\varphi + G \frac{d\eta}{ds} \cos\varphi$$

und weil

$$\frac{dx}{ds} = \cos\varphi \text{ und } \frac{d\eta}{ds} = \sin\varphi$$

nach bekannten trigonometrischen Formeln

36 $$X_\eta = H_\eta \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2} G_\eta (1 - \cos 2\varphi)$$

37 $$Y_\eta = H_\eta \cos 2\varphi + \tfrac{1}{2} G_\eta \sin 2\varphi$$

Dies sind die allgemeinsten Ausdrücke für die spezifische Schubkraft an beliebiger Stelle x, η und in beliebiger Richtung φ, sowie für die spezifische Zug- oder Druckkraft an derselben Stelle und senkrecht zur Richtung φ. Beide Formeln beziehen sich auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ bei η, G_η und H_η sind nach 35 und 28 einzusetzen, H_η also positiv von o bis μ, negativ von μ bis l. — Der Winkel φ ist so anzugeben, dass die Winkelspitze dem Maximalmomentenpunkt zugekehrt ist und der den Winkel von o nach φ beschreibende Schenkel die positive Drehung nach der Zugseite beginnt. Bei continuirlichen und eingespannten Trägern sind jedoch Einspannungsstellen und Zwischenstützen wie Maximalmomentenpunkte ($V_x = 0$), die Wendepunkte wie freie Auflagerstellen ($M_x = 0$) aufzufassen (Taf. I, 2).

Es interessiren nun für jede Entfernung η von der neutralen Schicht besonders diejenigen beiden Richtungen, in welchen X_η und Y_η ihre nummerisch grössten Werthe annehmen, sowie diese Maximalwerthe selbst. Wir bezeichnen die letztern und ihre Richtungen durch max X_η, φ' und max Y_η, φ'', wobei also max X_η noch Zug oder Druck bedeuten kann.

Für max X_η besteht die Bedingung

$$\frac{dX_\eta}{d\varphi} = 2H_\eta \cos 2\varphi + G_\eta \sin 2\varphi = 0$$
$$\text{tang } 2\varphi = -\frac{2H_\eta}{G_\eta}$$

und weil die Richtung, unter welcher X_η wirkt, immer nur um 90^0 von der Richtung φ abweicht, so ist auch

38 $$\text{tang } 2\,\varphi' = -\frac{2H_\eta}{G_\eta}$$

Der zugehörige Werth von X_η ergibt sich, wenn man $\cos 2\,\varphi$ und $\sin 2\,\varphi$ durch $\text{tang } 2\,\varphi$ ausdrückt und in 36 einsetzt, nämlich

39 $$\max X_\eta = \tfrac{1}{2}\,G_\eta \pm \sqrt{G_\eta^2 + 4H_\eta^2}$$

Für den Wurzelausdruck ist das gleiche Zeichen maassgebend, welches G_η nach 35 hat; $\max X_\eta$ ist also positiv und Zug auf der Zugseite, es ist negativ und Druck auf der Druckseite.

Die Bedingung für $\max Y_\eta$ ist

$$\frac{dY_\eta}{d\eta} = -\,2\,H_\eta \sin 2\,\varphi + G_\eta \cos 2\,\varphi = 0$$

woraus

40 $$\text{tang } 2\,\varphi'' = \frac{G_\eta}{2H_\eta}$$

Man erhält durch Substitution der entsprechenden Werthe von $\cos 2\,\varphi$ und $\sin 2\,\varphi$ in 37

41 $$\max Y_\eta = \tfrac{1}{2}\sqrt{G_\eta^2 + 4\,H_\eta^2}$$

Es kommt hier nur auf den absoluten Werth von $\max Y_\eta$ an. Die beiden Vorzeichen des Wurzelausdrucks geben die zwei gleich und entgegengesetzten Kräfte, welche die in der Richtung φ bei x, η zusammenhängenden Flächen gegen einander zu verschieben suchen. Jedoch sind unsrer Bezeichnung entsprechend H_η und $\max Y_\eta$ immer mit gleichem Vorzeichen in die Formeln einzuführen, also positiv von o bis μ und negativ von μ bis l.

Die Formeln 39 und 41 geben die grösste rückwirkende Kraft und die grösste Schubkraft für irgend welchen Querschnitt x in jeder Entfernung η von der neutralen Schicht. Dieselben beziehen sich auf die ganze Breite b an der betreffenden Stelle.

Weil G_η seinen grössten Werth in den äussersten Fasern und H_η den seinigen in der neutralen Schicht hat, so lässt sich übersehen, dass schwerlich in irgend einem Querschnittselemente $\max Y_\eta$ grösser ist, wie in der neutralen Schicht, wo $\max Y_\eta = H_0$; praktische Rechnungen beweisen, dass dies nie der Fall ist. Dagegen erkennt man aus Gleichung 41, dass $\max X_\eta$ immer grösser wie G_η oder H_η; es kann aber auch in Punkten zwischen der neutralen Schicht grösser werden wie $\max X_a = G_a$ und $\max X_0 = H_0$, d. h. innerhalb eines Querschnitts kann der Werth der schiefen Zug- oder Druckkraft an gewissen Stellen auch die grössten vorkommenden Werthe von horizontaler Zug- oder Druckkraft und von horizontaler und vertikaler Schubkraft (alles spezifisch) übertreffen. Hierauf ist bei Dimensionenbestimmungen Rücksicht zu nehmen (§ 48).

§ 11. Richtungen der innern Maximalkräfte. Spannungstrajectorien.

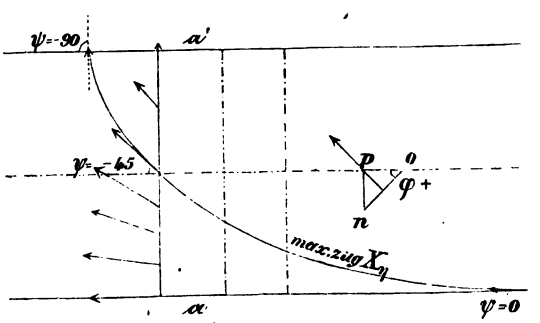
Bestimmen wir die Werthe und Richtungen des grössten spezifischen Zugs, des grössten spezifischen Drucks und des grössten spezifischen Schubs für alle Elemente eines ganzen Querschnitts, immer für die ganze Breite b an der betreffenden Stelle. Dieselben sollen bezeichnet sein durch max zug X_η, ψ, — max druck X_η, ψ', — max Y_η, φ''. Der Uebereinstimmung der Vorzeichen wegen nehme man den Querschnitt an einer bestimmten Stelle an, er soll zwischen Stütze o (resp. dem Wendepunkt $M_x = 0$, wenn diese Bedingung in o nicht erfüllt ist) und dem Maximalmomentenpunkte μ liegen. Es ist also H_η fortwährend positiv.

Trajectorien des grössten Zugs. Wenn Zug stattfinden soll, dann muss

36 $$X_\eta = H_\eta \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2} G_\eta (1 - \cos 2\varphi)$$

positiv sein.

Fig. 8.



In der äussersten Faser der Zugseite ist $H_\eta = 0$, G_η positiv, X_η positives Maximum für $\cos 2\varphi = -1$, $2\varphi = 180$

$$\text{max zug } X_a = G_a,\ \psi = \varphi - 90 = 0^0$$

In der neutralen Schicht ist $G_\eta = 0$, H_η positiv, X_η positives Maximum für $\sin 2\varphi = 1$, $2\varphi = 90^0$

$$\text{max zug } X_0 = H_0,\ \psi = \varphi - 90 = -45^0$$

In der äussersten Faser der Druckseite ist $H_\eta = 0$, G_η negativ, X_η positives Maximum für $\cos 2\varphi = 1$, $2\varphi = 0$

$$\text{max zug } X_{a'} = 0,\ \psi = \varphi - 90 = -90^0$$

In allen andern Punkten liegen Richtung und Grösse von max zug X_η zwischen diesen festen Werthen und können dieselben aus 38, 39 bestimmt werden, wenn man den Werth des Wurzelausdrucks immer positiv nimmt.

Denkt man sich in irgend welchem Element eines Querschnitts

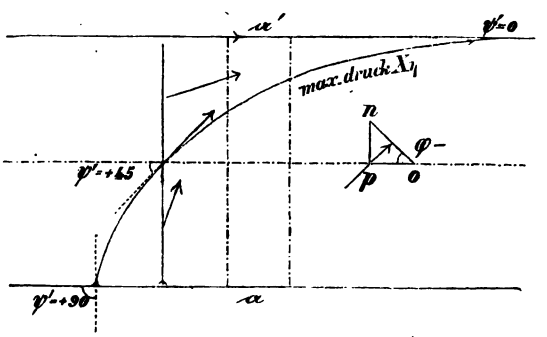
die Richtung der grössten Zugkraft bestimmt und beginnt damit eine Linie, der man nach links und rechts gehend, stets die Richtung von max zug X_η derjenigen Elemente gibt, welche sie in den aufeinanderfolgenden Querschnitten trajicirt, so erhält man eine „Trajectorie des grössten Zugs“ (Fig. 8).

Trajectorien des grössten Drucks. Soll Druck stattfinden, dann muss

36 $$X_\eta = H_\eta \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2} G_\eta (1 - \cos 2\varphi)$$

negativ sein.

Fig. 9.



In der äussersten Faser der Druckseite ist $H_\eta = 0$, G_η negativ, X_η ein negatives Maximum, wenn $\cos 2\varphi = -1$, $2\varphi = -180$

$$\max \text{ druck } X_{a'} = G_{a'},\ \psi' = \varphi + 90 = 0^0$$

In der neutralen Schicht ist $G_\eta = 0$, H_η positiv, X_η negatives Maximum bei $\sin 2\varphi = -1$, $2\varphi = -90$

$$\max \text{ druck } X_0 = -H_0,\ \psi' = \varphi + 90 = 45^0$$

In der äussersten Faser der Zugseite ist $H_\eta = 0$, G_η positiv, X_η negatives Maximum, wenn $\cos 2\varphi = 1$, $2\varphi = 0$

$$\max \text{ druck } X_a = 0,\ \psi' = \varphi + 90 = 90^0$$

Denkt man sich in einem beliebigen Element eines Querschnitts die Richtung von max druck X_η und beginnt in derselben eine Linie, welche in jedem Querschnitt die Richtung von max druck X_η desjenigen Elements annimmt, auf welches sie eben trifft, so erhält man eine „Trajectorie des grössten Drucks“ (Fig. 9).

Trajectorien des grössten Schubs. Von den beiden gleich und entgegengesetzten Kräften max Y_η, welche die Verschiebung in der Richtung φ zu bewirken suchen, betrachten wir die positive. Allgemein

37 $$Y_\eta = H_\eta \cos 2\varphi + \tfrac{1}{2} G_\eta \sin 2\varphi$$

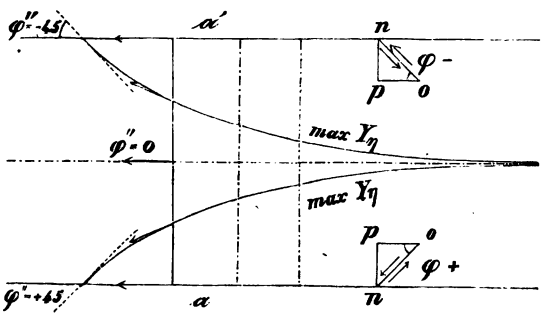
In der äussersten Zugfaser ist $H_\eta = 0$, G_η positiv, also Y_η positives Maximum bei $\sin 2\varphi = 1$, $2\varphi = 90^0$

$$\max Y_a = \tfrac{1}{2} G_a,\ \varphi'' = 45^0$$

In der neutralen Schicht ist $G_\eta = 0$, H_η positiv, Y_η positives Maximum, wenn $\sin 2\varphi = 1$, $2\varphi = 0$

$$\max\ Y_0 = H_0,\ \varphi'' = 0^0$$

Fig. 10.



In der äussersten Druckfaser ist $H_\eta = 0$, G_η negativ, Y_η positives Maximum, wenn $\sin 2\varphi = -1$, $2\varphi = -90^0$

$$\max\ Y_{a'} = -\tfrac{1}{2} G_{a'},\ \varphi'' = -45$$

Beginnt man mit der Richtung des Maximalschubs in irgend einem Körperelement einen Curvenzug, dem man in jedem von ihm begegneten Querschnitt die Richtung von max Y_η desjenigen Elements gibt, welches er trajicirt, so erhält man eine „Trajectorie des grössten Schubs“ (Fig. 10)

Die 3 Arten aufgeführter Curven heissen zusammen die „Spannungstrajectorien“ des belasteten Trägers. Sie stehen in mancherlei Beziehungen zu einander. Vergleicht man die Richtung des grössten Schubs φ'' mit den Richtungen des grössten Zugs und Drucks φ', so folgt aus

$$\operatorname{tang} 2\varphi'' = -\frac{1}{\operatorname{tang} 2\varphi'} = -\operatorname{cotg} 2\varphi'$$

$$\varphi'' = \varphi' \pm 45^0$$

Es bildet also in jedem Element die Richtung des grössten Schubs mit den Richtungen des grössten Zugs und Drucks Winkel von 45^0 und da die letztern (ψ und ψ') nicht zusammenfallen, so müssen sie senkrecht zu einander liegen.

Substituirt man die aus 38 für $\sin 2\varphi$ und $\cos 2\varphi$ folgenden Werthe in 37, so folgt für alle Elemente des Querschnitts

$$\text{für } \varphi = \varphi' \quad Y_\eta = 0$$

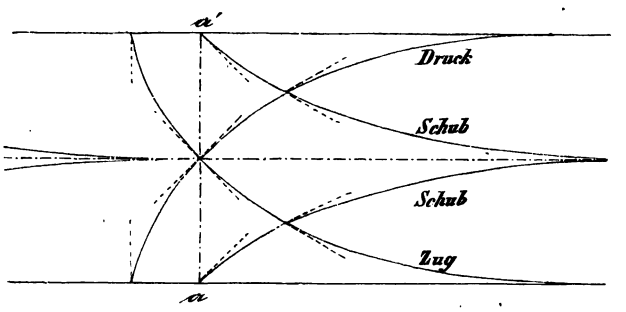
und setzt man die aus 40 resultirenden $\cos 2\varphi$ und $\sin 2\varphi$ in 36 so wird

$$\text{für } \varphi = \varphi'' \quad X_\eta = \tfrac{1}{2} G_\eta$$

Folgendes ist nun festgestellt.

Die Trajectorien des grössten Zugs verlassen die äusserste Druckfaser unter Winkeln von 90°, schneiden die neutrale Achse unter 45° und legen sich, soweit dies bis zum Maximalmomentenpunkt möglich ist, asymptotisch an die äusserste Zugfaser.

Fig. 11.



Die Trajectorien des grössten Drucks verlassen die äusserste Zugfaser unter Winkeln von 90°, schneiden die neutrale Achse unter 45° und legen sich soweit möglich asymptotisch an die äusserste Druckfaser.

Die Trajectorien des grössten Schubs verlassen die beiden äussersten Fasern unter Winkeln von 45° und legen sich asymptotisch an die neutrale Schicht.

Alle Trajectorien des grössten Zugs oder Drucks schneiden alle ihnen begegnenden Trajectorien des grössten Drucks oder Zugs unter rechten Winkeln und alle Trajectorien des grössten Schubs unter Winkeln von 45°.

Die Trajectorien des grössten Zugs oder Drucks geben die Spuren derjenigen sich auf die ganze Breite erstreckenden Flächen, längs welcher keine Schubkräfte stattfinden ($Y_\eta = 0$). Denkt man sich die Seiten der Körperelemente tangential zu den sie durchschneidenden Trajectorien des grössten Zugs und des grössten Drucks, so wird jedes Element in der Richtung der einen Tangente nur gezogen, in der Richtung der andern nur gedrückt. Eine weitere Beanspruchung der so gerichteten Elemente findet nicht statt.

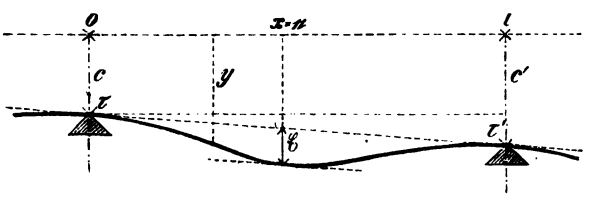
In der Natur finden sich diese Trajectorien in Knochen, Bäumen, wo die Fibernbildung mit der stetig zunehmenden Belastung fortschreitet, sichtbar vor. Die gewöhnliche Annahme paralleler Fasern in der Längsrichtung ist also sehr willkürlich.

Auf Tafel I, Fig. 1, 2 ist der ungefähre Verlauf der Spannungstrajectorien für alle Arten Träger den abgeleiteten Eigenschaften gemäss verzeichnet.

§. 12. Grösste Einsenkung.

Es soll die grösste Abweichung ermittelt werden, welche die elastige Linie durch die Biegung gegen ihre ursprüngliche Lage als Verbindungsgerade zweier Stützpunkte erlitten hat. Der Ort derselben stimmt nur bei gleichen Stützhöhen mit dem tiefsten (bei Krümmung nach oben mit dem höchsten) Punkte überein. Der absolut

Fig. 12.



tiefste Punkt interessirt nicht; er fiele ja auch bei Oeffnungen, die in schiefer Ebene liegen, gewöhnlich mit dem untern Ende der letztern zusammen. Es kommt allein darauf an, festzustellen, welche grössten Schwankungen möglich sind. Wir haben also nicht den grössten Werth von y, sondern (Fig. 12) das Maximum von

$$42 \qquad \mathfrak{E} = y - c - (c' - c)\frac{x}{l}$$

zu bestimmen. Daher ist Bedingung für die grösste Einsenkung

$$43 \qquad \frac{dy}{dx} - \frac{c' - c}{l} = 0$$

und ihr Ort $x = \mathfrak{e}$ findet sich stets aus

$$44 \qquad 0 = \tau - \frac{c' - c}{l} - \left[2M\mathfrak{e} + A\mathfrak{e}^2 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P(\mathfrak{e} - a)^2\right]\frac{1}{2E\Theta}$$

wonach dann ihr Werth $\mathfrak{E}$ mit Einsetzung von y nach 42

$$45 \qquad \mathfrak{E} = \left[\tau - \frac{c' - c}{l}\right]\mathfrak{e} - \frac{1}{6E\Theta}\left[3M\mathfrak{e}^2 + A\mathfrak{e}^3 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P(\mathfrak{e} - a)^3\right]$$

Dies ist der allgemeinste Ausdruck für die grösste Einsenkung. Sobald Form und Belastung des Trägers gegeben ist, sind τ, M, A durch 15, 17, 9 zu finden und dann auch $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{E}$ bestimmt.

Der Ort der grössten Einsenkung ist im Allgemeinen nicht identisch mit dem Maximalmomentenpunkt μ. Es kann dies vorkommen, wie bei einfachen Trägern, wenn Belastung Ort und Art der Auflager zu μ symmetrisch liegen. (§§ 39., 40., 44.) Stets ist

$$\text{Bedingung für } \mathfrak{e} \qquad \frac{dy}{dx} - \frac{c' - c}{l} = 0$$

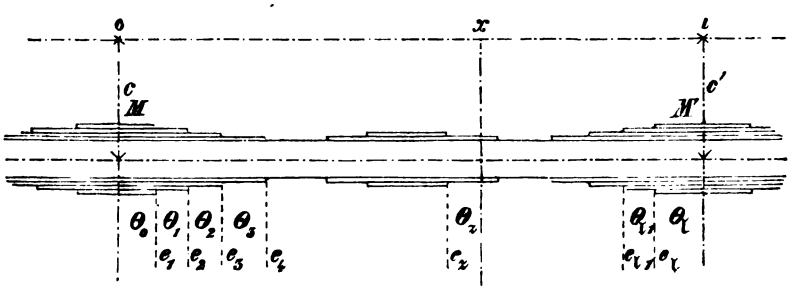
$$\text{Bedingung für } \mu \qquad \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

Bei der Abscisse μ liegt für $\frac{dy}{dx}$ ein Wendepunkt. Bei gleichen Stützhöhen fiele also in dem besondern Falle, dass $c = \mu$, der Wendepunkt einer Curve der $\frac{dy}{dx}$ mit demjenigen Punkte zusammen, in welchem diese Curve die Abscissenachse schneidet.

§ 13. Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt.

Der Querschnitt eines Trägers ist nicht auf die ganze Länge, wohl aber in der Oeffnung l auf gewisse Strecken e_1, $e_2 - e_1$, . . . $l - e_l$ konstant. Die entsprechenden Trägheitsmoduln sind Θ_0, $\Theta_1 - \Theta_0$. . . . Θ_l. Die neutrale Achse war vor der Biegung eine Gerade. Elastizitätsmodul E konstant.

Fig. 13.



Nach § 4. hat man für alle Träger

11 $$\frac{dy}{dx} = \tau - \int_0^x \frac{M_x}{E\Theta}\, dx$$

12 $$y = c + \tau x - \int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{E\Theta}\, dx$$

In diesen Gleichungen ist nun Θ nicht mehr konstant und es handelt sich besonders darum, die Integrationen auszuführen. Dies ist im Anhang geschehen. Es sei e_s die letzte Staffel vor einem beliebigen Querschnitt x, des Trägheitsmoment im letztern also Θ_s, so erhält man durch Substitution des Integralwerths Anh. 7 in 11

46 $$\frac{dy}{dx} = \tau - \frac{1}{2E\Theta_s}\left[2Mx + Ax^2 - \overset{x}{\Sigma} P(x-a)^2\right] - \frac{1}{2E\Theta_s}\overset{\nu=s}{\underset{\nu=1}{\Sigma'}}\left(\frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_s}{\Theta_\nu}\right)\left[2Me_\nu + Ae_\nu^2 - \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^2\right]$$

und als Gleichung der elastigen Linie für Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt, wenn Anh. 9 in 12 eingesetzt wird:

47 $$y = c + \tau x - \frac{1}{6E\Theta_s}\left[3Mx^2 + Ax^3 - \overset{x}{\Sigma} P(x-a)^3\right] -$$
$$\frac{1}{6E\Theta_s}\sum_{\nu=1}^{\nu=s}\left(\frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_s}{\Theta_\nu}\right)\left[3Me_\nu(2x-e_\nu) + Ae_\nu^2(3x-2e_\nu)\right.$$
$$\left. - \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^3 - 3(x-e_\nu)\overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^2\right]$$

Der zweite Klammerausdruck stellt den Einfluss der Staffeln dar. —

Für $x = l$ ist $y = c'$, $e_s = e_l$, $\Theta_s = \Theta_l$. Wir bezeichnen allgemein

48 $$\frac{\Theta_l}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_l}{\Theta_\nu} = \Delta_\nu$$

und erhalten

$$c' = c + \tau l - \frac{1}{6E\Theta_l}\left[3Ml^2 + Al^3 - \overset{l}{\Sigma} P(l-a)^3\right]$$
$$- \frac{1}{6E\Theta_l}\sum_{\nu=1}^{\nu=l}\Delta_\nu\left[3Me_\nu(2l-e_\nu) + Ae_\nu^2(3l-2e_\nu)\right.$$
$$\left. - \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^3 - 3(l-e_\nu)\overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^2\right]$$

Substituirt man in diese Gleichung noch den Werth von A aus 9 und transformirt, so folgt

$$\tau = \frac{c'-c}{l} + \frac{1}{6lE\Theta_l}\left[2Ml^2 + M'l^2 + \overset{l}{\Sigma} Pa(l-a)(2l-a)\right]$$
$$+ \frac{1}{6lE\Theta_l}\sum_{\nu=1}^{\nu=l}\Delta_\nu\left[2Me_\nu\left(3l - 3e_\nu + \frac{e_\nu^2}{l}\right) + M'e_\nu^2\left(3 - 2\frac{e_\nu}{l}\right)\right.$$
$$\left. + e_\nu^2\left(3 - 2\frac{e_\nu}{l}\right)\overset{l}{\Sigma} P(l-a) - \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^3 - 3(l-e_\nu)\overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^2\right] \quad (41)\ (42)$$

In 46 wird für $x = l$ $\frac{dy}{dx} = \tau'$, $e_s = e_l$, $\Theta_s = \Theta_l$, also

$$\tau' = \tau - \frac{1}{2E\Theta_l}\left[2Ml + Al^2 - \overset{l}{\Sigma} P(l-a)^2\right]$$
$$- \frac{1}{2E\Theta_l}\sum_{\nu=1}^{\nu=l}\Delta_\nu\left[2Me_\nu + Ae_\nu^2 - \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^2\right]$$

und indem man die Werthe von τ und A einsetzt

$$\tau' = \frac{c'-c}{l} - \frac{1}{6lE\Theta_l}\left[Ml^2 + 2M'l^2 + \overset{l}{\Sigma} Pa(l-a)(l+a)\right]$$
$$- \frac{1}{6lE\Theta_l}\sum_{\nu=1}^{\nu=l}\Delta_\nu\left[Me_\nu^2\left((3 - 2\frac{e_\nu}{l}\right) + 2M'\frac{e_\nu^3}{l} + 2\frac{e_\nu^3}{l}\overset{l}{\Sigma} P(l-a)\right.$$
$$\left. - 3e_\nu\overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^2 + \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^3\right] \quad (43)$$

Wir führen nun der Uebersichtlichkeit halber folgende Bezeichnungen ein

49
$$\begin{cases} \sum_{\nu=1}^{\nu=l} \Delta_\nu \frac{l^3-(l-e_\nu)^3}{l} = L' \\ \sum_{\nu=1}^{\nu=l} \Delta_\nu e_\nu^2\left(3-2\frac{e_\nu}{l}\right) = L'' \\ \sum_{\nu=1}^{\nu=l} \Delta_\nu \frac{e_\nu^3}{l} = L''' \end{cases}$$

50
$$\begin{cases} 3(l-e_\nu)\sum^{e_\nu} P(e_\nu-a)^2+\sum^{e_\nu} P(e_\nu-a)^3 = K_\nu \\ 3e_\nu\sum^{e_\nu} P(e_\nu-a)^2-\sum^{e_\nu} P(e_\nu-a)^3 = K'_\nu \end{cases}$$

und erhalten damit aus den Gleichungen für τ, τ'

51
$$\left[\tau-\frac{c'-c}{l}\right]6lE\Theta_l = 2M(l^2+L')+M'(l^2+L'') + \sum^{l} Pa(l-a)(2l-a)+L''\sum^{l} P(l-a)-\sum_{\nu=1}^{\nu=l}\Delta_\nu K_\nu$$

52
$$\left[\tau'-\frac{c'-c}{l}\right]6lE\Theta_l = -M(l^2+L'')-2M'(l^2+L''') - \sum^{l} Pa(l-a)(l+a)-2L'''\sum^{l} P(l-a)+\sum_{\nu=1}^{\nu=l}\Delta_\nu K'_\nu$$

Dies sind die Grundformeln für continuirlich und einfache Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt. Sie gelten für ganz beliebige concentrirte, gesetzmässig und gesetzlos vertheilte Lasten. L', L'', L''' können für jeden gegebenen Träger von vorn herein bestimmt werden, die einzeln K, K' erst nach Annahme der Belastung. Es ist auch hier über jeder Stütze r, $\tau'_{r-1} = \tau_r$ und lassen sich also die Gleichungen noch in die Form 17 bringen, doch geschieht dies in jedem einzeln Fall besser nach Einsetzen der Zahlenwerthe. In § 51. ist die ganze Berechnung an einem praktischen Beispiele klargemacht und kann dasselbe als Paradigma benutzt werden.

Sind die Stützenmomente nach den Gleichungen 51 und 52 bestimmt, dann gelten die Formeln für die Momente und Kräfte in allen Querschnitten ganz wie für Träger konstanten Querschnitts. Nur für die Schubkräfte ist dies in der Nähe der Sprungstellen nicht ganz exakt, aber die Abweichung ist ohne Belang. Ort und Werth der grössten Einsenkung folgen auch hier aus

43
$$\frac{dy}{dx}-\frac{c'-c}{l}=0$$

42
$$\mathfrak{E} = y-c-(c'-c)\frac{\epsilon}{l}$$

worin die Werthe $\frac{dy}{dx}$ und y mit $x = \mathfrak{e}$ aus 46 und 47 zu substituiren wären.

Ist das Trägheitsmoment konstant, dann verschwinden alle Δ_ν, damit auch alle L, und unsere Gleichungen gehen über in die § 5. für Träger konstanten Querschnitts abgeleiteten.

§ 14. Träger veränderlichen Querschnitts überhaupt.

Die in § 1. gegebene Fundamentalgleichung der Biegung

$$M_x = -E\Theta\frac{d^2y}{dx^2}$$

ist an die Bedingung geknüpft, dass die Formänderung der neutralen Achse eine einfache in einer Ebene stattfindende sei und dass $\frac{ds}{dx} = 1$ gesetzt werden könne. Es wird also nur dann ein Träger nach den hierauf gegründeten Gesetzen wirken, wenn die neutrale Achse nicht oder nur wenig von der Horizontalen durch einen der Stützpunkte abweicht. Dies bleibt auch Voraussetzung für die folgenden allgemeinsten Formeln des continuirlichen Trägers. (Vergl. § 16, e.) Nach § 4. sind die Tangente des Neigungswinkels und die Gleichung der elastigen Linie für alle Träger

$$\frac{dy}{dx} = \tau - \int_0^x \frac{M_x}{E\Theta}\,dx$$

$$y = c + \tau x - \int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{E\Theta}\,dx$$

Für $x = l$ wird $y = c'$, $\frac{dy}{dx} = \tau'$, demnach

$$c' = c + \tau l - \int_0^l dx \int_0^l \frac{M_x}{E\Theta}\,dx$$

$$\tau' = \tau - \int_0^l \frac{M_x}{E\Theta}\,dx$$

und aus diesen Gleichungen folgen:

53 $$\tau = \frac{c'-c}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l dx \int_0^l \frac{M_x}{E\Theta}\,dx$$

54 $$\tau' = \frac{c'-c}{l} + \frac{1}{l}\int_0^l dx \int_0^l \frac{M_x}{E\Theta}\, dx \; - \int_0^l \frac{M_x}{E\Theta}\, dx$$

worin wie für Träger konstanten Querschnitts

10 $$M_x = M + Ax - \sum^{x} P(x - a)$$

Diese Gleichungen gelten für homogene und heterogene Träger mit veränderlichem Querschnitt, so lange E nur innerhalb jedes einzeln Querschnitts einen festen Werth hat. (Vergl. § 16a.) E und Θ sind als Funktionen von x anzugeben und die Integrationen vorzunehmen. Nachdem aus 53 und 54 die Stützenmomente ganz wie für Träger mit konstantem Θ bestimmt sind, finden sich Momente und Kräfte in allen Querschnitten nach den auch für konstanten Querschnitt geltenden Formeln. Nur für die spezifischen Schubkräfte an beliebigen Stellen hätte eine besondere Untersuchung stattzufinden, was indessen auch für alle praktischen Berechnungen überflüssig ist. Für Ort und Werth der grössten Einsenkung erhält man wie in § 12.

55 $$\mathfrak{e} = x \text{ aus } 0 = \tau - \int_0^{\mathfrak{e}} \frac{M_x}{E\Theta}\, dx$$

56 $$\mathfrak{E} = \left[\tau - \frac{c'-c}{l}\right]\mathfrak{e} - \int_0^{\mathfrak{e}}\int_0^{\mathfrak{e}} \frac{M_x}{E\Theta}\, dx\, dx$$

§. 15. Zusammenhang zwischen Formänderung, Momenten und Kräften.

(Bestimmtheit der Vorzeichen.)

Der Krümmungsradius ϱ ist das Maass der Divergenz zweier ∞ benachbarter Querschnitte. Diese Divergenz ist ein Maximum, wo der absolute Werth von ϱ ein Minimum. Nach 4 ist in jedem Punkt

$$\varrho = \frac{E\Theta}{M_x}$$

Da also der Krümmungsradius stets umgekehrt proportional dem Momente im betreffenden Querschnitt ist, so kann die Curve der letztern zur Beurtheilung der Formänderung des Stabes dienen. Der obige Ausdruck kann 3 mal kleinste Werthe annehmen, für $x = o$, wo $M_x = M$, für $x = \mu$, wo $M_x = M_\mu$ und für $x = l$, wo $M_x = M'$. Für $x = \mu$ existirt dann ein nummerisches Maximum M_μ, 1) wenn überhaupt $o < \mu < l$ d. h. wenn überhaupt ein Punkt $V_x = 0$ innerhalb der Oeffnung existirt; 2) wenn der Werth von M_μ das positive

Vorzeichen besitzt, d. h. wenn bei $x = \mu$ eine Einsenkung des Stabs nach unten stattfindet. Ist M_μ negativ, dann repräsentirt sein absoluter Werth ein Minimum und es wird bei $x = \mu$ ϱ ein Maximum. Wäre $M_\mu = 0$, dann würde dort $\varrho = \infty$.

In jedem beliebigen Querschnitt, dessen Abscisse x, ist:

y Ordinate der elastigen Linie;

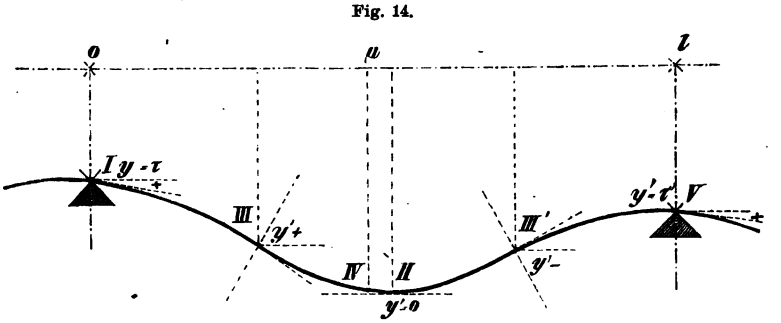
$y' = \frac{dy}{dx}$ trigonometrische Tangente;

$y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ proportional dem Moment;

$y''' = \frac{d^3y}{dx^3}$ proportional der vertikalen Schubkraft.

Die Einbiegung ist meistens gegen die Mitte der Oeffnungen entgegengesetzten Sinnes wie über den Stützen. Die elastige Linie enthält dann folgende Punkte von besonderer Bedeutung. (Vgl. Fig. 14.)

Fig. 14.



I. $x = 0, y = c, y' = \tau, M_x = -E\Theta y'' = M, V_x = E\Theta y''' = -A, \varrho = \frac{E\Theta}{M}$.

II. y ein Maximum, $y' = 0$, der Werth von x aus Gleichung $\frac{dy}{dx} = 0$.

III, III'. y' ein Maximum resp. Minimum, $y'' = 0$, $M_x = 0$, $\varrho = \infty$; Wendepunkte der elastigen Linie, der Biegungssinn ändert sich. Zeigt es sich im Laufe einer Untersuchung, dass M_x niemals 0 wird, dann ist der Stab von $x = o$ bis $x = l$ überall im selben Sinne durchgebogen. Werth von x aus Gleichung 10 für $M_x = 0$.

IV. $x = \mu$ aus 25, y'' ein Minimum, $M_x = M_\mu$ Maximum, $y''' = 0$, $V_x = 0$, ϱ ein Minimum. Für eine Curve der y' wäre hier der Wendepunkt.

V. $x = l, y = c', y' = \tau', M_x = -E\Theta y'' = M', V_x = E\Theta y''' = A', \varrho = \frac{E\Theta}{M}$.

Da allgemein

$$M_x = - E\Theta y''$$

und

$$V_x = + E\Theta y'''$$

so sind die Vorzeichen dieser Grössen durch folgende Erwägungen bestimmt.

I — III. y' wächst mit x, also y'' positiv und M_x negativ;

III — III'. y' nimmt ab, während x wächst, daher y'' negativ und M_x positiv;

III' — V. y' wächst mit x, also y'' positiv und M_x negativ;

I — IV. y'' nimmt ab, x zu, also y''' negativ und V_x negativ;

IV — V. y'' wächst mit x, y''' positiv und V_x positiv.

ϱ hat das gleiche Vorzeichen wie M_x; der Krümmungsradius ist also dann als positiv zu betrachten, wenn das Krümmungscentrum nach oben liegt. Ist der Stab von o bis l überall im gleichen Sinne durchgebogen, dann fallen die Punkte *III III'* weg und man erhält ganz wie vorstehend

I — V. M_x überall positiv resp. negativ.

I — IV. V_x negativ.

IV — V. V_x positiv.

Es kann auch vorkommen, dass der Punkt *IV* und einer oder beide Punkte *III, III'* wegfallen; in allen Fällen ist dasselbe Verfahren wie vorstehend anzuwenden, um die Vorzeichen mit Sicherheit festzustellen. Dass $V_0 = - A$ und $V_l = + A'$ rührt daher, dass ganz allgemein V_x von den beiden gleich und entgegengesetzten Kräften welche die Verschiebung der zwei im Querschnitt x zusammenhängenden Flächen hervorbringen wollen, immer die links, auf der Seite von Stütze o wirkende bedeutet. Sobald die Richtungen der Ordinaten und der positiven Zunahme des Neigungswinkels angenommen sind, ist eine Unsicherheit über den Sinn der innern Momente und Schubkräfte nicht mehr vorhanden.

§ 16. Gültigkeit der Hauptformeln des I. Abschnitts.

Die bis jetzt entwickelten Formeln gelten für alle Träger von 1 bis ∞ vielen Oeffnungen und für jede Belastungsart, sobald nur die in §§ 1. und 2. gestellten Bedingungen erfüllt sind. Die Voraussetzungen bei Ableitung der allgemeinen Biegungsformel haben gewisse Beschränkungen und Modificationen zur Folge, von denen es gut ist, sich Rechenschaft zu geben, und die wir daher kurz erwähnen wollen.

a) Die Elemente desselben Querschnitts sind nicht

homogen. Die Hypothese, dass Querschnitte, welche vor Einwirkung der äussern Kräfte geführt wurden, auch nach der Biegung Ebenen sind, ist ausgedrückt durch

$$\sigma : \sigma_\eta = 1 : \eta$$

Auf Grund dieser Annahme und mit der weitern Bedingung, dass E innerhalb jedes Querschnitts konstant, konnte in § 1. statt

$$M_x = \sum_{-a'}^{a} S_\eta \mathfrak{F}\eta$$

die einfachere Formel

$$M_x = S \sum_{-a'}^{a} \mathfrak{F}\eta^2$$

gesetzt werden. Wenn dagegen E nicht konstant, dann ist auch nicht $S_\eta = S\eta$, sondern es folgt aus

$$S : E = \sigma : s$$

$$S_\eta : E_\eta = \sigma_\eta : s$$

mit der gültig bleibenden Hypothese $S_\eta = \frac{E_\eta}{E} S\eta$ und also

3a $$M_x = \frac{S}{E} \sum_{-a'}^{a} \mathfrak{F}\eta^2 E_\eta$$

Wenn also auch die allgemeinen Formeln der §§ 1.—4., 14. zulassen, dass E in jedem Querschnitt einen andern Werth habe, so muss er doch innerhalb eines Querschnitts für sich konstant sein. Sonst gilt die Formel 3a. Der Fall tritt z. B. ein bei solchen Stäben, welche aus mehreren Lagen verschiedenen Materials zusammengesetzt sind. Es würde dann, weil auch jetzt noch

$$\frac{S}{E} = \frac{1}{\varrho} = -\frac{d^2y}{dx^2}$$

5a $$M_x = -\frac{d^2y}{dx^2} \Sigma E\Theta$$

worin $\Sigma E\Theta$ die Summe der Trägheitsmomente der einzeln Lagen in Bezug auf die neutrale Schicht multiplicirt mit den entsprechenden Elastizitätsmoduln bedeutet. Da indessen auch hier bei konstanten Lagequerschnitten $\Sigma E\Theta$ konstant, so ändert sich die Bestimmung von V_x und M_x gar nicht, es ist nur $\Sigma E\Theta$ an Stelle von $E\Theta$ zu setzen. Die Bedingung „Summe aller Horizontalkräfte gleich Null" ist indess ausgedrückt durch

6a $$\frac{S}{E} \sum_{-a'}^{a} \mathfrak{F}\eta \, E_\eta = 0$$

und man ersieht, dass die elastige Linie nur dann durch die Schwerpunkte der Querschnitte geht, wenn alle Lagen in Material und Stärke symmetrisch zur Mittellinie liegen. Für die spezifische horizontale und vertikale Schubkraft wird

28a $$H_\eta = -\frac{V_x}{\Sigma E \Theta} \sum_{\eta}^{\mathfrak{a}} \mathfrak{F}\eta \, E_\eta$$

Es ist noch $H_\eta = 0$ für $\eta = \mathfrak{a}$ und $\eta = -\mathfrak{a}'$, und von diesen äussersten Fasern nach der neutralen Schicht gehend ändert sich das Gesetz der Zunahme von H_η in allen Berührungsflächen zweier Lagen und zwar so, dass die spezifische Schubkraft bei gleicher Lagenbreite um so schneller wächst, je grösser der Elastizitätsmodul der Lage ist.

b) Die Elastizitätsmoduln auf Zugseite und Druckseite sind verschieden. Der Fall tritt ein, wenn die Zugseite aus anderem Material hergestellt wird wie die Druckseite, oder wenn man sich einen Träger aus solchem Material und so belastet denkt, dass nicht mehr E(Zug) gleich E'(Druck) gesetzt werden kann. Beides ist als spezieller Fall der allgemeinen Annahme unter a) aufzufassen und daher

5b $$M_x = -(E\Theta + E'\Theta')\frac{d^2y}{dx^2}$$

$$\frac{S}{E}\sum_{-\mathfrak{a}'}^{\mathfrak{a}} \mathfrak{F}\eta \, E_\eta = 0$$

Die elastige Linie geht nicht durch die Schwerpunkte der Querschnitte, sondern wird nach der Seite des grössten Elastizitätsmoduls hin abgelenkt. Spezifische horizontale oder vertikale Schubkraft

28a $$H_\eta = -\frac{V_x}{E\Theta + E'\Theta'} \sum_{\eta}^{\mathfrak{a}} E_\eta \, \mathfrak{F}\eta$$

Alles bei a) allgemein Gesagte bleibt gültig.

c) Lose Horizontalschichten. Die Existenz der horizontalen Schubkräfte zeigt, dass auch für gerade Stäbe von konstantem E die Fundamentalhypothese der Biegung nicht ganz exakt ist. Die Querschnitte stehen nach Einwirkung der äussern Kräfte nicht mehr perpendikulär der neutralen Schicht, sondern sind in der Richtung der horizontalen Schubkraft schief gegen dieselbe verschoben. Die Erfahrung lehrt, dass für gerade ganze Träger die Rechnungsresultate genügend genau mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Dies kann aber nicht mehr der Fall sein, wenn gewisse Horizontalschnitte frei der Schubkraft folgen können. Alsdann ist nach eingetretener Ruhe, und abgesehen von der Reibung, in allen Berührungsflächen zweier Lagen $H_\eta = 0$ und $S_\eta = 0$. Die einzeln Lagen folgen also keinem von einer gemeinsamen neutralen Schicht ausgehenden Impuls mehr, in den äussersten Fasern aller Lagen ist die Zug- oder Druckkraft $S_\eta' = 0$ wie für ganze Träger, jede Lage hat für sich eine neutrale Schicht und wirkt als selbstständiger Träger, es ist

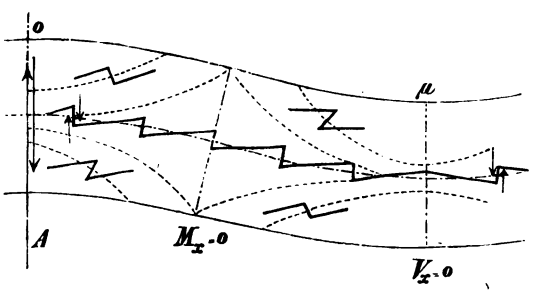
4c $$M_x = \Sigma S\Theta$$

Ein so zusammengesetzter Träger wird also zwar gegen Abscheeren

etwa ebenso widerstandsfähig sein, wie wenn er ganz wäre; er wird aber bedeutend weniger Tragfähigkeit besitzen und einer auf ihn wirkenden Last leichter nachgeben. (Plattfederwerke.)

d) Verzahnte Balken. Bei verzahnten oder verkeilten Balken können die einzeln verbundenen Lagen der Schubkraft nicht mehr frei folgen, die gewöhnlichen Formeln sind anwendbar. Dagegen müssen nun auch die einzeln Zähne im Stande sein, den auf sie entfallenden Theil des Horizontalschubs aufzunehmen. In Entfernung η von der neutralen Schicht ist

Fig. 15.



$$H_\eta = -\frac{V_x}{\Theta}\sum_{\eta}^{a}\mathfrak{F}\eta$$

Bezeichnet $\triangle$ die Entfernung zwischen dem zu berechnenden Zahn und dem nach dem Punkte $V_x = 0$ (Maximalmomentenpunkt μ) hin folgenden, so wird der Druck d_η auf den Zahn

28d $$d_\eta = -\frac{V_x}{\Theta}\triangle\sum_{\eta}^{a}\mathfrak{F}\eta$$

Dieser Druck wächst bei gleichem $\triangle$ gegen die Stützen hin und hat für einen bestimmten Querschnitt seinen grössten Werth bei Verzahnung in der neutralen Schicht.

Können die Zähne nur nach einer Seite widerstehen (Fig. 15), so soll bei Verzahnung in der neutralen Schicht

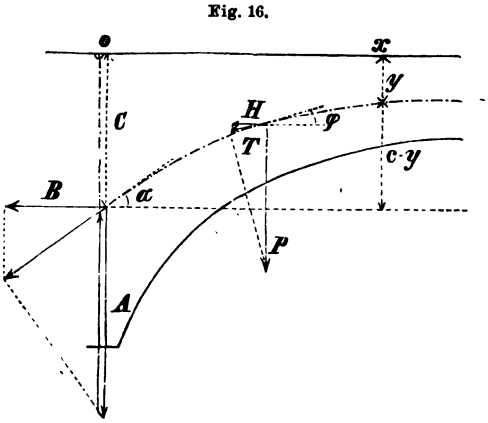
1) die Druckfläche perpendikulär der Richtung des grössten Schubs, also vertikal, stehen;

2) der dem untern Balken zugehörige Zahn dem Maximalmomentenpunkt μ ($V_x = 0$) zugekehrt sein.

Ausserhalb der neutralen Schicht würde sich diesen beiden Bedingungen nur noch durch ganz spitze oder stumpfe Winkel genügen lassen und daher rührt die manchmal hervorgehobene Unsicherheit über die zweckmässigste Richtung der Zähne. Man wählt ausserhalb der neutralen Schicht am besten schwalbenschwanzartige oder rechteckige Verbindungen.

e) Bogenförmige Träger. $\frac{ds}{dx}$ ist nicht gleich Null. Die in § 1. aufgestellte Fundamentalgleichung der Biegung ist an die Bedingung geknüpft, dass $\frac{ds}{dx} = 1$ gesetzt werden kann. Ist dies nicht der Fall, dann ändern sich beide Seiten der Gleichung. Wir wollen das an einem Träger mit bogenartigen Oeffnungen (Fig. 16) zeigen, wie wir ihn noch kürzlich in Berlin continuirlich ausführen sahen. Bezieht man auch hier auf Punkte der elastigen Linie, so erzeugt jede Kraft P eine

Fig. 16.



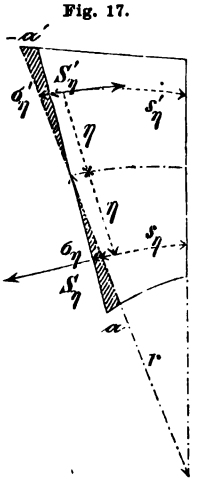
$$\text{Axialkraft } T = P \sin \varphi$$

deren Horizontalcomponente

$$H = P \sin \varphi \cdot \cos \varphi$$

Diese partiellen Schübe vereinigen sich zu zwei Kräften B, B', welche in den Stützpunkten nach aussen wirken; es findet ein Gleiten statt und sobald Ruhe eingetreten, mus $B = B'$ sein. In jedem Punkte x der elastigen Linie halten sich dann die Horizontalkräfte das Gleichgewicht und es gilt auch hier die Bedingung

Fig. 17.



$$\sum_{0}^{a} S_\eta \, \mathfrak{F} - \sum_{0}^{a'} S_\eta \, \mathfrak{F} = 0$$

Aber weil auf Zug- und Druckseite bei η und $-\eta$ zwar $\sigma_\eta = \sigma'_\eta$, aber nicht mehr $s_\eta = s'_\eta$, so ist auch nicht mehr $S_\eta = S'_\eta$, sondern wenn r den Krümmungsradius im Punkte x vor der Biegung bezeichnet (Fig. 17)

$$\frac{S'_\eta}{S_\eta} = \frac{s_\eta}{s'_\eta} = \frac{r-\eta}{r+\eta} = 1 - \frac{2\eta}{r+\eta}$$

also

6e $$S \sum_{-a'}^{a} \mathfrak{F}\eta + S \sum_{0}^{a'} \frac{2\eta}{r+\eta} \mathfrak{F}\eta = 0$$

worin S die Spannung des gezogenen Faserelements in Entfernung 1 von der neutralen Schicht. Die elastige Linie geht also nicht mehr

durch die Schwerpunkte der Querschnitte, sondern wird nach der Seite der kleinsten Faserelemente abgelenkt. Das Moment der innern Kräfte ist nun

3e $$M_x = S \sum_{-a'}^{a} \mathfrak{J}\eta^2 + S \sum_{0}^{a'} \frac{2\eta}{r+\eta} \mathfrak{J}\eta^2$$

und es stellt der 2te Theil des Aggregats den Einfluss der ursprünglichen Krümmung der neutralen Achse dar.

Wir haben jetzt noch die Aenderung des Moments der äussern Kräfte anzugeben. Für die gleich und entgegengesetzten Kräfte B, B' hat man

$$B = B' = A \sin \alpha \cos \alpha = A' \sin \alpha' \cos \alpha'$$

Wäre nun in der Richtung B, B' eine Zugstange wie bei Parabelträgern, Dachstühlen u. s. w., oder befänden sich in den Angriffspunkten dieser Kräfte reagirende Kämpfer wie bei wirklichen Bogen, so würden diese Horizontalschübe übertragen, noch bevor sie sich durch Gleiten ins Gleichgewicht gesetzt hätten. So aber entsteht eine Zunahme des Moments der äussern Kräfte, welche in jedem Querschnitt x gegen 10

10e $$\mathfrak{Z} = A \sin \alpha \cos \alpha \, (c - y)$$

beträgt. Diese Zunahme wird überall 0 für $\alpha = 0$ (gerade Träger) oder 90° (Halbkreisbogen). Das Moment der äussern Kräfte erleidet keine Zunahme über den Stützen, wo $y = c$, es wird am meisten vergrössert im Scheitel der elastigen Linie, wo y ein Minimum. Wäre also auf die durch 6e, 3e gegenüber 6, 3 ausgedrückte geänderte Vertheilung der innern Widerstände keine Rücksicht zu nehmen, so könnten die Stützenmomente wie für Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt berechnet werden, indem man die Oeffnung in eine genügende Anzahl Strecken eintheilte und in jeder derselben Θ konstant annähme. Aber auch bei dieser recht oberflächlichen Rechnung müssten doch die Momente innerhalb der Oeffnungen und besonders gegen die Mitte derselben dem obigen $\mathfrak{Z}$ entsprechend vergrössert werden. Dasselbe wird aus 10e angenähert gefunden, wenn man für α und $c - y$ deren Werthe für die Schwerlinie des Trägers vor der Biegung setzt.

Bei continuirlichen Trägern wirken den Zugkräften B, B' oft Druckkräfte, von der Belastung der übrigen Oeffnungen herrührend, entgegen. Es kann also die betrachtete Oeffnung auch als eigentlicher Bogen wirken oder gar auf Zerknicken beansprucht sein. Fährt über eine derartige Brücke ein Zug, so finden fortwährend Bewe-

gungen in der Längenrichtung statt. Auch im mittleren Theil der Oeffnungen können die Faserelemente bald auf Zug bald auf Druck beansprucht sein. Passt man aber die Querschnitte beim Scheitel diesen ungünstigen Wirkungen, sowie der Zunahme $\mathfrak{Z}$ des Moments M_x (10) an, so findet sich leicht, dass sie hier so gross werden wie über den Stützen, wo $\mathfrak{Z} = 0$ ist. Das Abnehmen der Trägerhöhe nach der Mitte verliert damit sein Hauptmotiv und alles zusammengefasst können solche Construktionen nicht als zweckmässig bezeichnet werden.

II. Abschnitt.

Theorie des Orts der Lasten.

§. 17. Direkte Bestimmung eines verlangten Stützenmoments.

In den zur Berechnung der Stützenmomente gegebenen Formeln des § 6. setzen wir die rechte Seite

$$R_r = -\left[\frac{c_{r-1}-c_r}{l_{r-1}} + \frac{c_{r+1}-c_r}{l_r}\right] 6\,E\,\Theta - \frac{1}{l_{r-1}} \sum_{r-1} P\,a\,(l-a)\,(l+a) - \frac{1}{l_r} \sum_{r} P\,a\,(l-a)\,(2\,l-a) \tag{57}$$

$$R_0 = \left[\tau_0 - \frac{c_1 - c_0}{l_0}\right] 6\,E\,\Theta - \frac{1}{l_0} \sum_{0} P\,a\,(l-a)\,(2\,l-a) \tag{58}$$

$$R_{n+1} = \left[\frac{c_{n+1}-c_n}{l_n} - \tau_{n+1}\right] 6\,E\,\Theta - \frac{1}{l_n} \sum_{n} P\,a\,(l-a)\,(l+a) \tag{59}$$

und haben dann

$$M_{r-1}\,l_{r-1} + 2\,M_r\,(l_{r-1}+l_r) + M_{r+1}\,l_r = R_r \tag{60}$$

$$2\,M_0\,l_0 + M_1\,l_0 = R_0 \tag{61}$$

$$M_n\,l_n + 2\,M_{n+1}\,l_n = R_{n+1} \tag{62}$$

wovon die 2 letzten Gleichungen nur bei Trägern mit eingespannten Enden gebraucht werden. Die direkte Bestimmung kann auf 2 Arten erfolgen.

a) Mittelst Determinanten. Schreibt man die Gleichungen 61, 62 für die Endstützen und die Gleichung 60 für sämmtliche Zwischenstützen, an, so erhält man folgendes System linearer Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} 2\,M_0\,l_0 + M_1\,l_0 = R_0 \\ M_0\,l_0 + 2\,M_1\,(l_0+l_1) + M_2\,l_1 = R_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{r-1}\,l_{r-1} + 2\,M_r\,(l_{r-1}+l_r) + M_{r+1}\,l_r = R_r \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ M_{n-1}\,l_{n-1} + 2\,M_n\,(l_{n-1}+l_n) + M_{n+1}\,l_n = R_n \\ M_n\,l_n + 2\,M_{n+1}\,l_n = R_{n+1} \end{array}\right. \tag{63}$$

Die Determinante des Systems der linearen Funktionen R ist:

64
$$\begin{vmatrix} 2l_0 & l_0 & & & & & & \\ l_0 & 2(l_0+l_1) & l_1 & & & & & \\ & 2(l_1+l_2) & & & & & & \\ & & l_2 & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot\, l_{n-2} & & \\ & & & & 2(l_{n-2}+l_{n-1}) & & l_{n-1} & \\ & & & & & l_{n-1} & 2(l_{n-1}+l_n) & l_n \\ & & & & & & l_n & 2l_n \end{vmatrix} = D$$

Multiplicirt man die Colonne, welche das Element $2(l_{r-1}+l_r)$ enthält, mit M_r und addirt dazu in bekannter Weise die mit entsprechendem M multiplicirten übrigen Colonnen, so ist der Werth der neuen Determinante

$$D_r = D\,M_r$$

und das gesuchte Moment

65
$$M_r = \frac{D_r}{D}$$

Bezeichnet α_r die Coefficientendeterminante von R_r in D_r, so wird

65a
$$M_r = \frac{1}{D}(\alpha_0 R_0 + \alpha_1 R_1 + \cdots + \alpha_n R_n + \alpha_{n+1} R_{n+1})$$

Die Determinante D ist für Berechnung sämmtlicher M bei allen Belastungsfällen dieselbe und, ebenso wie D_r, je nachdem die Trägerenden eingespannt oder frei aufliegend, von $n+2$ter oder $n$ter Ordnung. Die α sind Determinanten $n+1$ter resp. $n-1$ter Ordnung, welche nur für dieselbe Stütze in allen Belastungsfällen denselben Werth haben. Die Werthe R sind durch 57—59 gegeben.

b) Mittelst recurrenter Gleichungen. Multiplicirt man die unter 63) angeschriebenen $n+2$ Gleichungen mit vorläufig ganz beliebigen Grössen $\lambda_0, \lambda_1, \cdots \lambda_n, \lambda_{n+1}$, so dass also auf der rechten Seite allgemein $\lambda_r R_r$ erscheint, und addirt, so folgt

$$\begin{aligned}
M_0 \quad & [\qquad\qquad\qquad\qquad 2l_0\ \lambda_0 + l_0\lambda_1\ ] + \\
M_1 \quad & [l_0\ \lambda_0 + 2(l_0 + l_1)\lambda_1 + l_1\lambda_2\ ] + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M_r \quad & [l_{r-1}\lambda_{r-1} + 2(l_{r-1}+l_r)\lambda_r + l_r\lambda_{r+1}] + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
M_n \quad & [l_{n-1}\lambda_{n-1} + 2(l_{n-1}+l_n)\lambda_n + l_n\lambda_{n+1}] + \\
M_{n+1} \quad & [l_n\ \lambda_n + 2\,l_n\,\lambda_{n+1}\qquad\qquad\qquad\ ] = \sum_0^{n+1} \lambda\, R
\end{aligned}$$

Es sind $n+2$ verschiedene λ vorhanden; dieselben können eben so vielen Bedingungen unterworfen werden. Wir verlangen, dass im

vorstehenden Aggregat der Coefficient von M_r zu 1, die Coefficienten aller übrigen M zu 0 werden. Dann folgt

66 $$M_r = \sum_{0}^{n+1} \lambda R$$

und die λ sind durch folgendes System linearer Gleichungen bestimmt:

67
$$\left\{\begin{array}{l}
2\,l_0\,\lambda_0 + l_0\,\lambda_1 = 0 \\
l_0\,\lambda_0 + 2\,(l_0 + l_1)\,\lambda_1 + l_1\,\lambda_2 = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_{r-2}\,\lambda_{r-2} + 2\,(l_{r-2} + l_{r-1})\,\lambda_{r-1} + l_{r-1}\,\lambda_r = 0 \\
l_{r-1}\,\lambda_{r-1} + 2\,(l_{r-1} + l_r)\,\lambda_r + l_r\,\lambda_{r+1} = 1 \\
l_r\,\lambda_r + 2\,(l_r + l_{r+1})\,\lambda_{r+1} + l_{r+1}\,\lambda_{r+2} = 0 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
l_{n-1}\,\lambda_{n-1} + 2\,(l_{n-1} + l_n)\,\lambda_n + l_n\,\lambda_{n+1} = 0 \\
l_n\,\lambda_n + 2\,l_n\,\lambda_{n+1} = 0
\end{array}\right.$$

Wir nennen die Gesammtheit dieser Gleichungen „Bedingungssystem der λ für die Stütze r“ oder kurzweg „λ-System der Stütze r.“ Die λ haben für jede Stütze r feste, nur von der Form des Trägers nicht von der Belastung und Höhenlage der Stützpunkte abhängige, Werthe. Sind sie nach 67 berechnet, dann kann M_r mit Leichtigkeit für alle Belastungsfälle gefunden werden. Diese Bestimmungsweise der Stützenmomente ist besonders dann zweckmässig, wenn, wie bei Brückenträgern, gewisse Stützenmomente für eine ganze Anzahl verschiedener Belastungsfälle zu berechnen sind (Vergl. die Beispiele §§. 49, 51).

Liegen die Trägerenden frei auf, dann tritt an Stelle von Formel 66

66a $$M_r = \sum_{1}^{n} \lambda R$$

und das λ-System der Stütze r beginnt und endigt mit den Gleichungen

$$2\,(l_0 + l_1)\,\lambda_1 + l_1\,\lambda_2 = 0$$
$$l_{n-1}\,\lambda_{n-1} + 2\,(l_{n-1} + l_n)\,\lambda_n = 0$$

indem alsdann die Coefficienten λ_0 und λ_{n+1} gleich 0 zu setzen sind.

§ 18. Einige Eigenschaften der λ-Systeme.

Die Kenntniss der λ-Systeme ist zur Bestimmung der Stützenmomente nicht unbedingt nothwendig. Diese können auch (vergl. die Beispiele §§. 53., 54.) ohne Weiteres aus den Gleichungen 60—62 gefunden werden. Dagegen liefern die λ-Systeme ein bequemes Mittel, viele Eigenschaften der continuirlichen und einfachen Träger

auf analytische oder auch raisonnirende Weise abzuleiten. Zu diesem Zwecke ist es nöthig, einige Eigenschaften dieser Systeme recurrenter Gleichungen zu kennen.

Geht man in dem System 67 von beiden Enden aus nach der nicht auf 0 reduzirten Gleichung, so findet sich

$$\lambda_1 = -2\lambda_0$$

$$\lambda_2 = -\lambda_1\left(2+2\frac{l_0}{l_1}\right) - \frac{l_0}{l_1}\lambda_0 = -\lambda_1\left[2+\frac{l_0}{l_1}\left(2+\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)\right] = -\lambda_1\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_0}{l_1}\right)$$

$$\lambda_3 = -\lambda_2\left[2+\frac{l_1}{l_2}\left(2-\frac{1}{2+\frac{3}{2}\frac{l_0}{l_1}}\right)\right]$$

oder dem nummerischen Werthe nach

$$\lambda_3 > \lambda_2\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_1}{l_2}\right)$$

So fortfahrend und auch von dem andern Ende des Gleichungssystems aus vorgehend, erhält man allgemein für absolute Werthe

68
$$\begin{cases} \text{wenn} \quad m \leqq \operatorname{Ind} r \quad \lambda_m > \lambda_{m-1}\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_{m-2}}{l_{m-1}}\right) \\ \text{wenn} \quad m \geqq \operatorname{Ind} r \quad \lambda_m > \lambda_{m+1}\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_{m+1}}{l_m}\right) \end{cases}$$

wo Ind r den Index derjenigen Stütze bezeichnet, welcher das betrachtete λ-System angehört. Hierin sind als Gränzfälle enthalten $\lambda_1 = 2\lambda_0$ und $\lambda_n = 2\lambda_{n+1}$, denn für $m = 1$ oder $m = n$ ist l_{m-2} oder l_{m+1} gleich Null. Man ersieht nun

1) dass von λ_0 und λ_{n+1} gegen λ_r zu, jedes folgende λ mindestens doppelten Zahlenwerth als das vorhergehende hat;

2) dass die Vorzeichen der λ alterniren.

Da also λ_r grösser wie λ_{r-1} und λ_{r+1}, so mögen in

$$l_{r-1}(\lambda_{r-1} + 2\lambda_r) + l_r(2\lambda_r + \lambda_{r+1}) = 1$$

λ_{r-1} und λ_{r+1} welches Vorzeichen immer haben, damit das positive 1 auf der rechten Seite möglich sei, muss stets λ_r positiv sein; daraus folgt aber sofort mit Rücksicht auf 2), dass λ_{r-1}, λ_{r+1}, sowie alle Coefficienten von der Form $\lambda_{r\pm 2\nu+1}$ negativ, und diejenigen nach der Form $\lambda_{r\pm 2\nu}$ positiv sind.

Denkt man sich wie in 67 das λ-System der Stütze r, so auch die Bedingungssysteme aller übrigen Stützen angeschrieben, so erkennt man, dass ein bestimmtes Verhältniss $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ konstant ist in den Systemen aller Stützen vom Index $\geqq m+1$, dass es ferner einen andern, aber ebenfalls festen Werth besitzt in den Systemen aller Stützen vom Index $\leqq m$. Es kann also ein solches Verhältniss in

allen Systemen — mag die Zahl der Stützen noch so gross sein — nur 2 verschiedene Werthe annehmen, und wir setzen

$$69 \quad \begin{cases} B_m = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} & \text{wenn Ind } r \geqq m+1 \\ B'_m = \frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} & \text{wenn Ind } r \leqq m \end{cases}$$

Beide B sind negativ und nach 68 stets $B_m > 2$, $B'_m < \frac{1}{2}$, also unbedingt $B_m > 4\,B'_m$, aber z. B. für lauter gleiche l $B_m > \frac{49}{4}$.

Dividirt man jede auf 0 reduzirte Gleichung im System 67 durch das mittlere der drei λ, so folgt allgemein

$$70 \quad \begin{cases} \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} l_{m-1} + 2\,l_{m-1} + 2\,l_m = -\,B_m\,l_m & \text{wenn Ind } r \geqq m+1 \\ \frac{\lambda_{m+2}}{\lambda_{m+1}} l_{m+1} + 2\,l_{m+1} + 2\,l_m = -\,\frac{1}{B'_m}\,l_m & \text{wenn Ind } r \leqq m \end{cases}$$

Es ist also z. B.

$$71 \qquad B_n = -\,\frac{2\,l_n + l_{n-1}\left(2 + \frac{1}{B_{n-1}}\right)}{l_n}$$

$$72 \qquad B'_0 = -\,\frac{l_0}{(2 + B'_1)\,l_1 + 2\,l_0}$$

Diese Gleichungen sind nöthig zur Bestimmung von B_n und B'_0 bei Trägern mit frei aufliegenden Enden. Es soll B_n nach 69 folgen aus dem System einer Stütze vom Index $\geqq n+1$. Von solchen Systemen existirt nur dasjenige der Stütze $n+1$ selbst. Bei frei aufliegenden Trägerenden sind aber wegen $M_{n+1} = 0$ in $M_{n+1} = \sum_0^{n+1} \lambda R$ alle λ Null, sodass sich für B_n der unbestimmte Ausdruck $\frac{0}{0}$ ergibt. Analog verhält es sich mit B'_0. Durch die Gleichungen 71, 72 ist diese Unbestimmtheit gehoben. Wir werden in § 22, zeigen, dass auch

$$71a \qquad B_n = -\,\frac{1}{\lambda_n\,l_n}$$

$$72a \qquad B'_0 = -\,\lambda_1\,l_0$$

wo λ_0 dem System der Stütze 1, λ_n dem System der Stütze n zu entnehmen ist.

Wird bei einem Träger, dessen B, B' berechnet sind, die Reihenfolge der Oeffnungen umgekehrt, sodass die erste Oeffnung als letzte und 0 als höchster Index gilt, dann folgen der Entstehung der B, B' gemäss, deren neue Werthe

$$73 \quad \begin{cases} (B_m) = \frac{1}{B'_m} \\ (B'_m) = \frac{1}{B_m} \end{cases}$$

In § 47. soll angegeben werden wie die B, B' auch ohne Kenntniss der λ-Systeme direkt aus den Längen zu finden sind.

Wären sämmtliche l gleich, und ist $n+1 = r+v$, so erhielte man aus dem Bedingungssystem 67 folgendes System der λ für die Stütze r

$$\lambda_0 = (-1)^r \frac{b_0}{b_r} \lambda_r \qquad \lambda_{r+1} = -\frac{b_{v-1}}{b_v} \lambda_r$$

$$\lambda_1 = (-1)^{r-1} \frac{b_1}{b_r} \lambda_r \qquad \lambda_{r+2} = (-1)^2 \frac{b_{v-2}}{b_v} \lambda_r$$

. . . . . .

$$\lambda_{r-1} = -\frac{b_{r-1}}{b_r} \lambda_r \qquad \lambda_{r+v-1} = (-1)^{v-1} \frac{b_1}{b_r} \lambda_r$$

$$\lambda_r = \lambda_r \qquad \lambda_{n+1} = (-1)^v \frac{b_0}{b_v} \lambda_r$$

worin die b wie folgt bestimmt

b_0	b_1	b_2	b_3	. . .	b_m	. . .
1	2	7	26	. . .	$4\,b_{m-1} - b_{m-2}$	. . .

und alsdann $\lambda_r = \dfrac{1}{l\left(4 - \dfrac{b_{r-1}}{b_r} - \dfrac{b_{v-1}}{b_v}\right)}$ ist

§ 19. Einfluss der Belastung verschiedener Oeffnungen auf irgend ein Stützenmoment M_r.

In § 17. wurde gefunden

66 $$M_r = \sum_0^{n+1} \lambda R$$

Die R, durch 57—59 bestimmt, sind, soweit von der Belastung abhängend negativ. Wir bezeichnen auch M_r dann als wachsend, wenn sein Werth gegen das Negative hin zunimmt. Dann wirken positive λ vergrössernd, negative verkleinernd auf das Stützenmoment M_r. Fasst man in $\sum_0^{n+1} \lambda R$ die Beiträge, welche durch Belastung der Oeffnungen, respektive Verschiedenheit der Stützhöhen entstehen, nach diesen Kategorien zusammen, so folgt:

$$M_r = -\sum_{m=0}^{m=n} \frac{1}{l_m} \left[\lambda_m \sum_m P a (l-a)(2l-a) + \lambda_{m+1} \sum_m P a (l-a)(l+a)\right]$$

74 $$-6 E \Theta \left[-\tau_0 \lambda_0 + \sum_{m=0}^{m=n} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \frac{c_m - c_{m+1}}{l_m} + \tau_{n+1} \lambda_{n+1}\right]$$

wobei zu berücksichtigen, dass für freiaufliegende Trägerenden λ_0 und λ_{n+1} gleich Null sind. Der Beitrag der Belastung in einer beliebigen Oeffnung l_m zu dem Stützenmoment M_r ist also

$$\mathfrak{B}_m = \frac{1}{l_m} \left[\lambda_m \sum_m P a (l-a)(2l-a) + \lambda_{m+1} \sum_m P a (l-a)(l+a)\right]$$

oder weil

$$\frac{a\,(l-a)\,(2\,l-a)}{a\,(l-a)\,(l+a)} = \frac{2\,l-a}{l+a}$$

75 $$\mathfrak{B}_m = \frac{1}{l_m} \sum_m P\,a\,(l^2-a^2)\left(\lambda_{m+1} + \lambda_m \frac{2\,l-a}{l+a}\right)$$

Das Moment M_r nimmt in negativem Sinne zu, wenn $\mathfrak{B}_m$ positiv ist. Die Werthe der beiden λ sind von verschiedenem Vorzeichen; das λ_r zunächst liegende ist mindestens doppelt so gross als das entferntere. Da nun $\frac{2\,l-a}{l+a} \leqq 2$, so hat $\mathfrak{B}_m$ stets dasselbe Vorzeichen wie das grösste der beiden λ. Es wird also zufolge dem in § 18. Gesagten,

1) wenn Ind $r \geqq m+1$ oder $m \leqq r-1$: $\mathfrak{B}_m$ positiv oder negativ je nachdem λ_{m+1} positiv oder negativ, d. h. je nachdem m von der Form $r-2\,\nu-1$ oder von der Form $r-2\,\nu$ ist; $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} = B_m$;

2) wenn *Ind* $r \leqq m$ oder $m \geqq r$: $\mathfrak{B}_m$ positiv oder negativ, je nachdem λ_m positiv oder negativ, d. h. je nachdem m nach der Form $r+2\,\nu$ oder aber von der Form $r+2\,\nu+1$ ist; $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m} = B'_m$; — mit andern Worten:

Die Belastung der Oeffnungen, welche der Stütze r anliegen oder durch eine gerade Anzahl Pfeiler von ihr getrennt sind, wirkt vergrössernd, die Belastung der übrigen Oeffnungen wirkt verkleinernd auf das Moment M_r.

Der Einfluss einer Kraft P in jeder Oeffnung l_m auf jedes Stützenmement M_r ist Null, wenn $a = 0$ oder l; er ist ein Maximum, wenn der absolute Werth von

$$a\,(l^2-a^2)\left(\lambda_{m+1} + \lambda_m \frac{2\,l-a}{l+a}\right)$$

zum Maximum wird, d. h. wenn

für $m \leqq r-1$ $\quad a\,(l^2-a^2)\left(B_m + \frac{2\,l-a}{l+a}\right)$,

für $m \geqq r$ $\quad a\,(l^2-a^2)\left(B'_m + \frac{2\,l-a}{l+a}\right)$

seinen grössten Werth annimmt. Daraus folgt:

In jeder Oeffnung l_m eines continuirlichen Trägers existiren 2 nur von der Form, nicht von der Belastung abhängige, feste Punkte α_m α'_m von der Art, dass für eine in l_m angreifende Kraft P, bei $a = \alpha'_m$ die Aenderungen der Momente aller folgenden, und bei $a = \alpha_m$ die Aenderungen der Momente aller vorhergehenden Stützen Maxima werden. Diese Punkte nennen wir „feste Influenzpunkte" der Oeffnung l_m (vergl. §§. 22., 26.). Sie existiren auch an einfachen Trägern, wenn Stützenmomente vorhanden sind. Aus den angegebenen Bedingungen folgt mittelst der Lehre von Maxima und Minima:

76 $$\alpha'_m = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{3}(1 - B_m)(2 + B_m)}}{1 - B_m} l_m$$

77 $$\alpha_m = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3}(1 - B'_m)(2 + B'_m)}}{1 - B'_m} l_m$$

Dass der Wurzelausdruck im ersten Fall mit positivem, im 2ten mit negativem Vorzeichen zu nehmen ist, erkennt man durch einfache Discussion, wenn man bedenkt, dass beide B negativ, also die Nenner positiv sind, dass ferner die α stets positiv sein und zwischen 0 und l liegen müssen. Als Resultat der Untersuchung haben wir nun:

Das negative Moment M_r über einer beliebigen Stütze r wird um so grösser,

1) je grösser die Gesammtlasten in den beiden anliegenden und in allen durch eine gerade Anzahl Pfeiler von r getrennten Oeffnungen sind (Totalbelastung);

2) je dichter sich alle Lasten und besonders die grössten derselben in diesen Oeffnungen gruppiren

wenn $m \geq r$ um die Influenzpunkte α_m,

wenn $m \leq r - 1$ um die Influenzpunkte α'_m;

3) je kleiner die Gesammtlasten in allen durch eine ungerade Anzahl Pfeiler von r getrennten Oeffnungen sind (Eigengewicht allein);

4) je mehr sich in diesen Oeffnungen die vorhandenen Lasten, besonders die grössten derselben

wenn $m > r$ von den Influenzpunkten α_m,

wenn $m < r - 1$ von den Influenzpunkten α'_m

gegen die Stützen hin entfernen.

Die Voraussetzungen 2) und 4) kommen natürlich nur bei concentrirten oder ungleichmässig vertheilten Lasten in Betracht. Es ist ausserdem kaum nöthig zu erwähnen, dass nach 75 und wegen des schnellen Abnehmens der λ von λ_r nach λ_0 und λ_{n+1} zu, dieselbe Last an irgend welcher Stelle einer der Stütze r näher gelegenen Oeffnung bedeutend mehr auf das Moment M_r wirkt, als wenn sie an der entsprechenden Stelle einer entfernteren Oeffnung läge. Ein wirkliches Bild des Einflusses einer bestimmten Last P in allen möglichen Angriffspunkten auf das Stützenmoment M_r gibt die „Influenzcurve" für dieses Moment. (Vergl. § 22. und Taf. II.)

Kehrt man die Sätze 1) — 4) um, so hat man die Bedingungen für das negative Minimum oder positive Maximum von M_r. Mit Ausnahme der Verhältnisse innerhalb l_r stimmen die Bedingungen für das negative Maximum von M_r mit denjenigen für das negative Minimum von M_{r+1} überein, und umgekehrt.

§ 20. Einfluss verschiedener Stützhöhen auf irgend ein Stützenmoment M_r.

Als Einwirkung aller Differenzen in den Höhenlagen der Stützpunkte auf das Moment M_r folgt aus 74

$$78\ \mathfrak{D} = 6\,E\,\Theta\left[-\tau_0\,\lambda_0 + \sum_{m=0}^{m=n}(\lambda_{m+1}-\lambda_m)\frac{c_m - c_{m+1}}{l_m} + \tau_{n+1}\,\lambda_{n+1}\right]$$

worin bei frei aufliegenden Trägerenden $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n+1} = 0$ und alle λ dem System der Stütze r angehören. Die Zunahme durch Verschiedenheit von c_m und c_{m+1}, der Stützpunkte, welche die Oeffnung l_m begrenzen, ist hierbei

$$79 \qquad \mathfrak{d}_m = 6\,E\,\Theta\,(\lambda_{m+1}-\lambda_m)\frac{c_m - c_{m+1}}{l_m}$$

Die beiden λ sind von verschiedenem Vorzeichen, ihre absoluten Werthe addiren sich also und es wird,

1) wenn Ind $r \geqq m+1$, also $m \leqq r-1$: $\lambda_{m+1} - \lambda_m$ positiv oder negativ, je nachdem λ_{m+1} positiv oder negativ, d. h. je nachdem m von der Form $r - 2\nu - 1$ oder von der Form $r - 2\nu$ ist; dann ist $\mathfrak{d}_m$ positiv, wenn im ersten Falle $c_m > c_{m+1}$ und wenn im 2ten Falle $c_m < c_{m+1}$, im ersten Falle wenn die r zunächst liegende, im 2ten wenn die entferntere der beiden Stützen höher liegt;

2) wenn Ind $r < m$, also $m \geqq r$: $\lambda_{m+1} - \lambda_m$ positiv oder negativ, je nachdem λ_m negativ oder positiv, d. h. je nachdam m von der Form $r + 2\nu + 1$ oder nach der Form $r + 2\nu$ ist; dann ist $\mathfrak{d}_m$ positiv, wenn im 1ten Falle $c_m > c_{m+1}$ und wenn im 2ten Falle $c_m < c_{m+1}$, im 1ten Falle wenn die r zunächst liegende, im 2ten Falle wenn die entferntere der beiden Stützen niedriger liegt. — Dies zusammengefasst, folgt:

Das Moment M_r über einer beliebigen Stütze r wird vergrössert,

1) wenn in Oeffnungen, die durch 0 oder eine gerade Anzahl Pfeiler von r getrennt sind, der r zunächst liegende der beiden begränzenden Stützpunkte höher ist;

2) wenn in Oeffnungen, die durch eine ungerade Anzahl Pfeiler von r getrennt sind, der entferntere Stützpunkt höher liegt.

Ausserdem folgt aus 79, dass die Aenderung durch die Höhendifferenz zweier eine Oeffnung begränzender Stützpunkte proportional ist der Grösse dieser Differenz, jedoch innerhalb der in § 2. für diese Verschiedenheit festgesetzten Grenze.

§ 21. Wirkung einer Einzellast in der Oeffnung l_s. Von l_s verschiedene Oeffnungen.

Ein continuirlicher Träger, in irgend einer Weise belastet, ist gegeben. Die Stützhöhen sind gleich oder verschieden. Wir bringen eine neue Last P bei a in der beliebigen Oeffnung l_s hinzu. Die Folge ist eine Anderung der innern Momente und Kräfte auf der ganzen Länge des Trägers. Bezeichnet man diese Aenderungen mit den entsprechenden Buchstaben (klein), wie die geänderten Grössen selbst, so folgt aus dem Bedingungssystem 63 mit Rücksicht auf die Werthe der R

$$
80\left\{\begin{array}{llll}
 & 2m_0\ l_0 & +m_1\ l_0 & = 0 \\
m_0\ l_0 & +2m_1\ (l_0 & +l_1\ )+m_2\ l_1 & = 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_{s-1}l_{s-1} & +2m_s\ (l_{s-1} & +l_s\ )+m_{s+1}l_s & = -\frac{1}{l_s}Pa(l-a)(2l-a) \\
m_s\ l_s & +2m_{s+1}(l_s & +l_{s+1})+m_{s+2}l_{s+1} & = -\frac{1}{l_s}Pa(l-a)(\ l+a) \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
m_{n-1}l_{n-1} & +2m_n\ (l_{n-1} & +l_n\ )+m_{n+1}l_n & = 0 \\
m_n\ l_n & +2m_{n+1}\ l_n & & = 0
\end{array}\right.
$$

Das Bedingungssystem der Zunahmen ist also dasselbe, wie für die Stützenmomente am gleichen Träger, bei Wegfall der Differenzen der Stützhöhen, wenn allein in der Oeffnung l_s bei a die Einzellast P wirkt. Es folgt ganz wie in § 18. bei Bestimmung der λ

$$m_1 = -2\,m_0 \qquad m_n = -2\,m_{n+1}$$

$$m_2 = -m_1\left(2+\tfrac{3}{2}\frac{l^0}{l_1}\right) \qquad m_{n-1} = -m_n\left(2+\tfrac{3}{2}\frac{l_n}{l_{n-1}}\right) \text{ u. s. w.}$$

und allgemein abgesehen vom Vorzeichen

81 wenn $m \leqq \operatorname{Ind} s$ $\quad m_m > m_{m-1}\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_{m-2}}{l_{m-1}}\right)$

82 wenn $m \geqq \operatorname{Ind} s+1$ $\quad m_m > m_{m+1}\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_{m+1}}{l_m}\right)$

worin auch $m_1 = 2\,m_0$ und $m_n = 2\,m_{n+1}$, wegen $l_{1-2} = 0$ und $l_{n+1} = 0$, als Grenzfälle enthalten sind. Aus Vergleichung der beiden Systeme 80 und 67 ersieht man, dass ausserdem nach Werth und Vorzeichen genau

81a wenn $m \leqq \operatorname{Ind}\ s$ $\quad \frac{m_m}{m_{m-1}} = B_{m-1}$

82a wenn $m \geqq \operatorname{Ind}\cdot s+1$ $\quad \frac{m_{m+1}}{m_m} = B'_m$

und folgendes ist festgestellt:

Geht man von beiden Enden des Trägers nach der Oeffnung l_s, so ist die Aenderung jedes folgenden Stützenmoments dem absoluten Werthe nach mindestens doppelt so gross, bei lauter gleichen Oeffnungen circa $\frac{1}{2}$ mal so gross, als die des vorhergehenden. Die genauen Verhältnisse sind durch die Gleichungen 81a, 82a gegeben. Die Vorzeichen der Aenderungen alterniren. Die Verhältnisszahlen sind unabhängig von Lage und Grösse der Last, sowie von Verschiedenheiten der Stützhöhen.

In § 19. wurde nachgewiesen, dass jede Belastung einer anliegenden Oeffnung vergrössernd auf den negativen Werth des Moments über einer Stütze wirkt. Es sind also m_s und m_{s+1} negativ, damit werden aber alle m von den Formen $m_{s-2\pi}$ und $m_{s+2\pi+1}$ negativ, und diejenigen nach den Formen $m_{s-2\pi-1}$ und $m_{s+2\pi}$ positiv; wir erhalten, was schon aus § 19. hervorgeht:

Fig. 18.

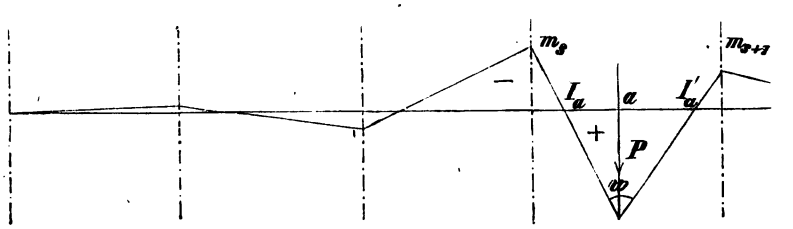
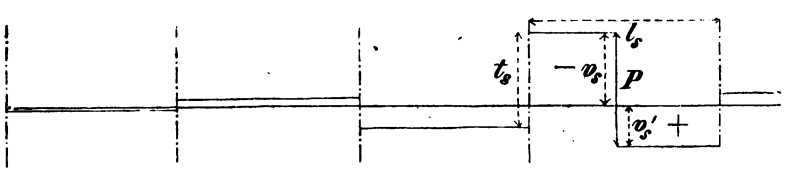


Fig. 19.



Durch Aufbringen einer weiteren Last in der beliebigen Oeffnung l_s nehmen die Momente zu über den Stützen, welche von l_s durch 0 oder eine gerade Anzahl Oeffnungen getrennt sind. Sie nehmen ab über Stützen, welche durch eine ungerade Anzahl Oeffnungen von l_s getrennt liegen.

Die Zunahme des Moments M_x in dem beliebigen Querschnitt x irgend einer von l_s verschiedenen Oeffnung l_m ist nach 10 und 9

83 $$m_x = m_m + \frac{x}{l_m}(m_{m+1} - m_m)$$

Trägt man m_m, m_{m+1} ihren Vorzeichen entsprechend bei $x = 0$, $x = l$ auf, so wird die Curve der m_x dargestellt durch die Gerade, welche die Endpunkte von m_m und m_{m+1} verbindet (Fig. 18); daher:

Die Aenderungen der Momente zwischen den Stützen in

einem bestimmten Sinne sind proportional der Abscisse x; sie sind zum Theil negativ, in einem Punkte 0, zum Theil positiv.

Wie allgemein gefunden (26) ist

$$\frac{dM_x}{dx} = -V_x$$

somit in allen von l_s verschiedenen Oeffnungen l_m für jeden Querschnitt

84 $$v_x = \frac{1}{l_m}(m_m - m_{m+1}) = v_m = -a_m = a'_m$$

Für $m+1 \leq s$ ist v_m positiv oder negativ, je nachdem m_{m+1} negativ oder positiv (Fig. 19), d. h. je nachdem der Index m von der Form $s - 2\pi - 1$ oder aber nach der Form $s - 2\pi$ ist.

Aus 84

$$v_{m-1} = \frac{m_m}{l_{m-1}}\left(\frac{m_{m-1}}{m_m} - 1\right)$$

$$v_m = \frac{m_m}{l_m}\left(1 - \frac{m_{m+1}}{m_m}\right)$$

und weil $\frac{m_{m-1}}{m_m}$ und $\frac{m_{m+1}}{m_m}$ immer negativ, in Bezug auf nummerischen Werth nach 81

85 $$\frac{v_{m-1}}{v_m} < \frac{3 + \frac{3}{2}\frac{l_{m-2}}{l_{m-1}}}{\left(3 + \frac{3}{2}\frac{l_{m-1}}{l_m}\right)\left(2 + \frac{3}{2}\frac{l_{m-2}}{l_{m-1}}\right)}\frac{l_m}{l_{m-1}}$$

sodass z. B. für lauter gleiche l $\frac{v_{m-1}}{v_m} < \frac{2}{1}$. Mathematisch genau nach Werth und Vorzeichen ist wegen 81a

85a $$\frac{v_{m-1}}{v_m} = \frac{1 - B_{m-1}}{(1 - B_m)B_{m-1}}\frac{l_m}{l_{m-1}}$$

was stets negativ.

Für $m \geq s + 1$ ist v_m positiv oder negativ je nachdem m_m positiv oder negativ, d. h. je nach dem Index m von der Porm $s + 2\pi$ oder von der Form $s + 2\pi + 1$ ist. Aus

$$v_m = \frac{m_{m+1}}{l_m}\left(\frac{m_m}{m_{m+1}} - 1\right)$$

$$v_{m+1} = \frac{m_{m+1}}{l_{m+1}}\left(1 - \frac{m_{m+2}}{m_{m+1}}\right)$$

folgt für das Verhältniss zweier aufeinander folgender Zunahmen mit 82

86 $$\frac{v_{m+1}}{v_m} < \frac{3+\frac{3}{2}\frac{l_{m+2}}{l_{m+1}}}{\left(3+\frac{3}{2}\frac{l_{m+1}}{l_m}\right)\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_{m+2}}{l_{m+1}}\right)}\frac{l_m}{l_{m+1}}$$

und in Werth und Vorzeichen genau wegen 82a

86a $$\frac{v_{m+1}}{v_m} = \frac{(1-B'_{m+1})\,B'_m}{1-B'_m}\frac{l_m}{l_{m+1}}$$

Für die Zunahme der Reaktion einer beliebigen Stütze hat man

87 $$t_m = a'_{m-1} + a_m = v_{m-1} - v_m = \frac{1}{l_{m-1}}(m_{m-1}-m_m) + \frac{1}{l_m}(m_{m+1}-m_m)$$

Die Reaktion wächst, wenn dieser Werth positiv ist. Sowohl für $m+1 \leqq s$ als für $m-1 \geqq s+1$ hat t_m das Vorzeichen von v_{m-1} oder das entgegengesetzte von v_m. Es ist also im ersten Falle t_m positiv für m von der Form $s-2\pi$ und negativ, wenn es nach der Form $s-2\pi-1$ ist; im zweiten Falle ist t_m positiv oder negativ je nachdem m von der Form $s+2\pi+1$ oder von der Form $s+2\pi$ ist. Der absolute Werth von t_m lässt sich nach 87 und den Angaben über die v beurtheilen. Wir haben nun:

Durch Aufbringen einer weitern Last in einer beliebigen Oeffnung l_s ist innerhalb jeder von l_s verschiedenen Oeffnung die Aenderung der vertikalen Schubkräfte konstant. Die positiven nehmen zu, die negativen ab in den Oeffnungen $l_{s-2\pi-1}$ und $l_{s+2\pi}$; die positiven nehmen ab, die negativen zu in den Oeffnungen $l_{s-2\pi}$ und $l_{s+2\pi+1}$. Die Reaktionen wachsen bei Stützen, welche durch eine gerade Anzahl Oeffnungen von l_s getrennt liegen, sie nehmen ab für Stützen, die durch eine ungerade Anzahl Oeffnungen von l_s getrennt sind.

§ 22. Wirkung einer Einzellast in der Oeffnung l_s. Die Oeffnung l_s.

Im vorigen Kapitel wurde der Einfluss der Einzelkraft P in l_s auf die Momente und Kräfte am continuirlichen Träger, mit Ausnahme der Oeffnung l_s selbst, dargestellt. Alle diese Verhältnisse sind jedoch gerade von den Aenderungen m_s und m_{s+1} abhängig, so zwar, dass wenn diese beiden Grössen bekannt sind, alle übrigen aus der gegebenen Form des Trägers gefunden werden können. Vorläufig wissen wir aus § 19 nur, dass m_s und m_{s+1} das negative Vorzeichen haben, dass sie also Zunahme der Momente über den Stützen s und $s+1$ konstituiren. Nach dem Bedingungssystem ist

$$m_{s-1}\,l_{s-1} + 2\,m_s\,(l_{s-1}+l_s) + m_{s+1}\,l_s = -\frac{1}{l}\,Pa(l-a)(2l-a)$$

$$m_s\,l_s + 2\,m_{s+1}(l_s + l_{s+1}) + m_{s+2}\,l_{s+1} = -\frac{1}{l}\,Pa(l-a)(l+a)$$

wobei wir unter l ohne Index die Oeffnung l_s verstehen. Aus 81a und 82a folgt

$$m_{s-1} = \frac{1}{B_{s-1}} m_s$$

$$m_{s+2} = B'_{s+1}\, m_{s+1}$$

und nach Einführen dieser Werthe, sowie der Formeln 70 in die vorstehenden Gleichungen

$$-m_s B_s + m_{s+1} = -\frac{1}{l^2} P a (l-a)(2l-a)$$

$$m_s - m_{s+1}\frac{1}{B'_s} = -\frac{1}{l^2} P a (l-a)(l+a)$$

sodass die gesuchten Zunahmen

88 $$m_s = -\frac{P a (l^2-a^2)\left(\frac{2l-a}{l+a}\frac{1}{B'_s}+1\right)}{l^2\left(1-B_s\frac{1}{B'_s}\right)}$$

89 $$m_{s+1} = -\frac{P a (l^2-a^2)\left(\frac{2l-a}{l+a}+B_s\right)}{l^2\left(1-B_s\frac{1}{B'_s}\right)}$$

Die Anwesenheit der B zeigt die Abhängigkeit der Aenderungen von der Form des ganzen Trägers.

Wirkt die Kraft P in l_0 oder l_n eines Trägers mit frei aufliegenden Enden, so ist wegen $m_{n+1} = 0$ und $m_0 = 0$ aus *)

88a $$m_n = \frac{1}{B_n l_n^2} P a (l-a)(2l-a)$$

89a $$m_1 = \frac{B'_0}{l_0^2} P a (l-a)(l+a)$$

Diese Werthe folgen auch aus 88 und 89 wenn man in $m_s = m_n$ Zähler und Nenner mit B'_n multiplicirt, in $m_{s+1} = m_1$ Zähler und Nenner durch B_0 dividirt und bedenkt, dass im ersten Fall $B'_n = 0$, im zweiten Fall $B_0 = -\infty$ wird. (Vergl. § 46. Beisp. 5.) Da auch nach 66a und 57 wenn P in l_n resp. l_0 wirkt.

$$m_n = -\frac{\lambda_n}{l_n} P a (l-a)(2l-a)$$

$$m_1 = -\frac{\lambda_1}{l_0} P a (l-a)(l+a)$$

so finden wir

72a $$B'_0 = -\lambda_1 l_0$$

71a $$B_n = -\frac{1}{\lambda_n l_n}$$

wo λ_1 dem System der Stütze 1 und λ_n dem System der Stütze n zu entnehmen ist. Für einfache Träger mit eingespannten Enden ist. (Vergl. in § 46. Beisp. 7.)

$$B = -2, \qquad B' = -\tfrac{1}{2}$$

Substituirt man diese Werthe in $m_s = m$ und $m_{s+1} = m'$ so folgt

$$m = -\frac{1}{l^2} P a (l-a)^2$$

$$m' = -\frac{1}{l^2} P a^2 (l-a)$$

was wir in § 39. auf ganz anderm Wege finden werden.

Die Zunahme m_s ist grösser, gleich oder kleiner als m_{s+1} je nachdem

$$\frac{2l-a}{l+a}\frac{1}{B'_s} + 1 \gtreqless \frac{2l-a}{l+a} + B_s$$

d. h. je nachdem

90 $$a \gtreqless \frac{2 - B_s\ B'_s - B'_s}{1 + B_s\ B'_s - 2\ B'_s} l_s$$

und es wird m_s oder m_{s+1} zum Maximum

$$\text{wenn} \quad a(l^2-a^2)\left(\frac{2l-a}{l+a} + B'_s\right)$$

$$\text{oder} \quad a(l^2-a^2)\left(\frac{2l-a}{l+a} + B_s\right)$$

seinen grössten Werth hat. Bestimmt man die entsprechenden Werthe von a mittelst der Lehre von Maxima und Minima und bezeichnet dieselben durch α_s, α'_s, so folgt

76 $$\alpha_s = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3}(1 - B'_s)(2 + B'_s)}}{1 - B'_s} l_s \qquad (\text{max. } m_s)$$

77 $$\alpha'_s = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{3}(1 - B_s)(2 + B_s)}}{1 - B_s} l_s \qquad (\text{max. } m_{s+1})$$

wir sind wieder auf die bereits in § 19. auf andere Weise gefundenen festen Influenzpunkte gelangt.

In der Oeffnung l_s ist von $x = 0$ bis $x = a$ nach 10 und 9

91 $$m_x = m_s + \frac{x}{l_s}[m_{s+1} - m_s + P(l-a)]$$

und von $x = a$ bis $x = l$

91a $$m_x = m_s + \frac{x}{l_s}[m_{s+1} - m_s - P a] + P a$$

Die Curve der m_x besteht also aus 2 Geraden, die bei $x = a$ zusammenstossen (Fig. 18) und einen Winkel einschliessen, für welchen

$$\operatorname{tg} w = \lim_{\delta=0} \left(\frac{dm_x}{dx}\right)_{a-\delta}^{a+\delta} = P$$

Selbstverständlich für $x = 0$ $m_x = m_s$ und für $x = l$ $m_x = m_{s+1}$

Für die Aenderungen der vertikalen Schubkräfte hat man von $x = 0$ bis $x = a$

92 $$v_x = -\frac{dm_x}{dx} = \frac{1}{l_s}[m_s - m_{s+1} - P(l-a)] = v_s = -a_s$$

und von $x = a$ bis $x = l$

92a $$v_x = \frac{1}{l_s}\,[m_s - m_{s+1} + P\,a] = v'_s = a'_s$$

$$v'_s - v_s = P = a_s + a'_s$$

Von $x = 0$ bis $x = a$ ist $d\,m_x$ positiv, von $x = a$ bis $x = l$ wird es negativ, während dx von $x = 0$ bis $x = l$ positiv. Es hat also in der Oeffnung l_s die Aenderung der vertikalen Schubkräfte von $x = 0$ bis $x = a$ einen konstanten negativen, von $x = a$ bis $x = l$ einen konstanten positiven Werth (Fig. 19). Das Verhältniss der Aenderungen ist

93 $$\frac{v_s}{v'_s} = 1 - \frac{P\,l_s}{m_s - m_{s+1} + P\,a}$$

Für die Zu- oder Abnahmen der Reaktionen der Stützen s und $s + 1$ hat man

94 $$\begin{cases} t_s &= a'_{s-1} + a_s \\ t_{s+1} &= a'_s \quad + a_{s+1} \end{cases}$$

Nach § 21. ist v_{s-1} positiv, v_{s+1} negativ, also nach 84 a'_{s-1} und a_{s+1} positiv. Weil v_s negativ und v'_s positiv, so sind auch a_s und a'_s positiv. Es sind also auch t_s und t_{s+1} positiv, die Reaktionen der l_s begrenzenden Stützen nehmen zu.

Da nach den Formeln der §§. 9., 10. die horizontalen und schiefen Spannungen bestimmt sind, sobald die vertikale Schubkraft bekannt ist, so haben wir nun den Einfluss einer weiteren Last oder eines Lastelements P in der beliebigen Oeffnung l_s auf die innern Momente und Kräfte an alle Stellen des ganzen Trägers festgestellt.

Lässt man ein und dieselbe Last P alle Punkte eines Trägers zwischen den äussersten Enden durchlaufen und trägt alsdann über jedem derselben als Angriffspunkt von P die zugehörige Aenderung des Moments in einem bestimmten Querschnitt x der Oeffnung l_s dem Vorzeichen entsprechend auf, so entsteht eine Curve, welche „Influenzcurve“ für das Moment im Querschnitt x heissen mag. In analoger Weise lässt sich eine Influenzcurve für die vertikale Schubkraft im Querschnitt x herstellen. Diese Influenzcurven lassen am besten den Einfluss des Orts einer gleichbleibenden Last auf Momente und Schubkräfte in beliebigen Querschnitten erkennen (Taf. II).

Die Influenzcurven haben je nach dem Ort von x verschiedene Formen, die indessen, wie natürlich, in einander übergehen. Charakteristische Formen für die Influenzcurven der Momente treten ein, wenn der Querschnitt x mit o (oder l) zusammenfällt, zwischen o und I_s (oder I'_s und l) liegt, auf I_s (oder I'_s) trifft oder sich zwischen I_s und I_s befindet. Die Influenzcurven für die Schubkraft v_x sind nur wesentlich verschieden, je nachdem x mit o (oder l) zusammenfällt oder zwischen o und l liegt. Ihr Verlauf in den von l_s

verschiedenen Oeffnungen ist für alle Querschnitte innerhalb l_s derselbe.

Alle Influenzcurven sind unabhängig von Differenzen in der Höhenlage der Stützen.

§ 23. Inflexionspunkte.

Bei Untersuchung des Einflusses der Einzellast P auf die Momente der von l_s verschiedenen Oeffnungen ergab es sich, dass in jeder derselben ein Querschnitt existirt, für welchen $m_x = 0$ ist, in welchem also das vorhanden gewesene Moment M_x keine Aenderung erlitten hat. Für die Abscisse dieses Punktes folgt aus 83

83a $$x = \frac{m_m}{m_m - m_{m+1}} l_m = \frac{1}{1 - \frac{m_{m+1}}{m_m}} l_m$$

Das Verhältniss $\frac{m_{m+1}}{m_m}$ kann 2 verschiedene Werthe haben. Es wurde gefunden (69)

$$\frac{m_{m+1}}{m_m} = B_m \text{ wenn } m + 1 \leqq s$$

$$\frac{m_{m+1}}{m_m} = B'_m \text{ wenn } m \geqq s + 1$$

Der Punkt $m_x = 0$ kann also nur zwei verschiedene Orte treffen, er nimmt den ersten ein, wenn die Oeffnung l_s nach der Oeffnung l_m liegt (Fig. 18) und den zweiten, wenn l_s vor l_m ist. Bezeichnen wir diese Punkte in jeder Oeffnung l_m durch I_m, I'_m, so sind die Abscissen aus 83a

95 $$I_m = \frac{1}{1 - B_m} l_m$$

96 $$I'_m = \frac{1}{1 - B'_m} l_m$$

In § 21. wurde gefunden, dass

81 $$\frac{m_{m+1}}{m_m} > 2 + \tfrac{3}{2} \frac{l_{m-1}}{l_m} \text{ wenn } m + 1 \leqq s$$

82 $$\frac{m_{m+1}}{m_m} < \frac{1}{2 + \frac{3}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}} \quad \text{wenn} \quad m \geqq s + 1$$

und da beide Quotienten negativ, so erhält man

95a $$I_m < \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m-1}}{l_m}} \frac{l_m}{3}$$

96a $$I'_m > l_m - \frac{1}{1 + \frac{1}{2} \frac{l_{m+1}}{l_m}} \frac{}{3}$$

Aus dem Bedingungssystem 80 geht hervor, dass ein bestimmtes Verhältniss $\frac{m_{m+1}}{m_m}$ auch dann noch seinen Werth B_m' behält, wenn mehrere oder alle Oeffnungen l_s, für welche $s \geqq m + 1$ ist, ganz beliebig belastet werden. Ebenso behält dasselbe Verhältniss seinen 2ten Werth B'_m bei, wenn auch alle Oeffnungen l_s, für welche $s + 1 \leqq m$, irgend wie belastet sind. Es folgt:

In jeder Oeffnung l_m eines continuirlichen Trägers existiren 2 nur von der Form, nicht von der Belastung abhängige feste Punkte I_m, I'_m, welche in den äussersten Dritteln der Spannweite so liegen, dass das Moment bei I_m durch beliebige Belastung aller folgenden, das Moment bei I'_m durch beliebige Belastung aller vorhergehenden Stützen nicht geändert wird. Diese Punkte heissen „feste Inflexionspunkte" der Oeffnung l_m.

Die festen Inflexionspunkte liegen im Allgemeinen nicht gleich weit von den Stützen entfernt. Man übersieht, dass dies nur dann der Fall sein wird, wenn der ganze Träger in Bezug auf Länge, Folge der Spannweiten und Querschnitte zur betrachteten Oeffnung symmetrisch ist. Verschiedenheit der Stützhöhen hat keinen Einfluss auf die Lage der Inflexionspunkte, wohl aber auf die der Wendepunkte. In l_0 und l_n liegen, wenn die Trägerenden unwandelbar festgespannt I_0 und I'_n genau $\frac{l_0}{3}$ und $\frac{l_n}{3}$ von den Widerlagern ab ($l_{0-1} = 0$, $l_{n+1} = 0$). Dasselbe gilt für einfache Träger mit eingespannten Enden. (Vergl. § 47., Beisp. 3, 4.) Liegen die Enden frei auf, dann sind $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n+1} = 0$, also $B_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = -\infty$, $B'_n = \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 0$ und $I_0 = 0$, $I'_n = l_n$.

Unter „laufenden Inflexionspunkten" verstehen wir solche Punkte einer Oeffnung l_s, in welchen die Momente durch eine bei a in l_s angreifende Last P nicht geändert werden. (Fig. 18.) Es ist also Bedingung $m_x = 0$.

Von $x = 0$ bis $x = a$ hat man

91 $$m_x = m_s + \frac{x}{l_s}\,[m_{s+1} - m_s + P(l-a)]$$

und von $x = a$ bis $x = l$

91a $$m_x = m_s + \frac{x}{l_s}\,[m_{s+1} - m_s - Pa] + Pa$$

wir erhalten laufende Inflexionspunkte

97 $$\text{vor } a \quad I_a = \frac{m_s}{m_s - m_{s+1} - P(l-a)}\, l_s$$

98 $$\text{nach } a \quad I'_a = \frac{m_s + Pa}{m_s - m_{s+1} + Pa}\, l_s$$

Da P in m_s und m_{s+1} als Faktor auftritt (88, 89), so sind auch die laufenden Inflexionspunkte unabhängig von der Grösse der Last; sie sind aber abhängig vom Ort derselben.

Für $a = 0$ ist $m_s = 0$, $m_{s+1} = 0$, also $I_a = 0$, $I'_a = \frac{m_s}{m_s - m_{s+1}} l_s = I'_s$.

Für $a = l$ ist $m_s = 0$, $m_{s+1} = 0$, also $I_a = \frac{m_s}{m_s - m_{s+1}} l_s = I_s$, $I'_a = l_s$.

Dieselben Resultate werden erhalten, wenn man m_s, m_{s+1} nach 88, 89 in 97, 98 substituirt, gleiche Faktoren in Zähler und Nenner streicht und dann $a = 0$ oder l werden lässt. Man kommt dann für $a = 0$ und $a = l$ auf die Formeln 95 und 96. Da, wenn $a = 0$ oder l, die Oeffnung l_s ebenso gut für belastet als unbelastet gelten, die Kraft P also bereits zur vorhergehenden resp. folgenden Oeffnung gerechnet werden kann, so müssen ja auch hier die Formeln für feste und mobile Inflexionspunkte in einander übergehen. Weil sich I_a, I'_a mit a stetig ändern, so folgt:

Bewegt sich eine Last von einer Stütze zur andern, so beschreiben die laufenden Inflexionspunkte, in demselben Sinne wie die Last, die Strecken zwischen den Stützen und den festen Inflexionspunkten.

Wirken nun in der Oeffnung l_s beliebig viele Lasten, so werden auch dann noch die Punkte $M_x = 0$ innerhalb der genannten äussern Strecken liegen. Dies ist indess nicht mehr nöthig, wenn auch andre Oeffnungen belastet sind. Die Punkte $M_x = 0$ oder $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$, d. h. die Wendepunkte der elastigen Linie bei der angenommenen Gesammtbelastung können auf jede Stelle der Oeffnung treffen, sie können zusammenfallen und ganz fehlen. (§ 15.)

§ 24. Maxima der vertikalen und horizontalen Schubkräfte in beliebigen Querschnitten. Maxima der Stützenreaktionen.

Nach § 7. ist in jeder Oeffnung l_s die vertikale Schubkraft für den Querschnitt x

$$V_x = \overset{x}{\Sigma} P + \frac{1}{l_s} \left[M_s - M_{s+1} - \overset{l}{\Sigma} P (l - a) \right]$$

Man setze

$$M = \mathfrak{N}_s + \mathfrak{M}_s, \quad M_{s+1} = \mathfrak{N}_{s+1} + \mathfrak{M}_{s+1}$$

worin $\mathfrak{N}_s$, $\mathfrak{N}_{s+1}$ die Beiträge der Belastungen in den von l_s verschiedenen Oeffnungen (Aussenöffnungen), welche wir „Aussenbelastung" nennen wollen, und $\mathfrak{M}_s$, $\mathfrak{M}_{s+1}$ die Beiträge der Lasten innerhalb l_s. Der Ausdruck für V_x gilt als Beitrag der Aussenbelastung — wir bezeichnen ihn durch $\mathfrak{U}_x$ —

$$\mathfrak{U}_x = \frac{1}{l_s} (\mathfrak{N}_s - \mathfrak{N}_{s+1})$$

Der negative Werth von $\mathfrak{U}_x$ wird also um so grösser, je grösser das negative $\mathfrak{N}_s$ bei möglichst grossem positivem $\mathfrak{N}_{s+1}$ ist. Umgekehrt wird $\mathfrak{U}_x$ einen um so grössern positiven Werth haben, je grösser das positive $\mathfrak{N}_s$ bei möglichst grossem negativem $\mathfrak{N}_{s+1}$ ist. Die Aussenbelastung, welche für das negative max M_s gilt (§ 19.), erzeugt auch ein negatives max $\mathfrak{N}_s$ und ein positives max $\mathfrak{N}_{s+1}$; die Aussenbelastung, welche für ein negatives max M_{s+1} gilt, bedingt zugleich das positive max $\mathfrak{N}_s$ und das negative max $\mathfrak{N}_{s+1}$. Somit ist für negative Maxima der vertikalen Schubkräfte die Aussenbelastung von max M_s und für positive die Aussenbelastung von max M_{s+1} massgebend.

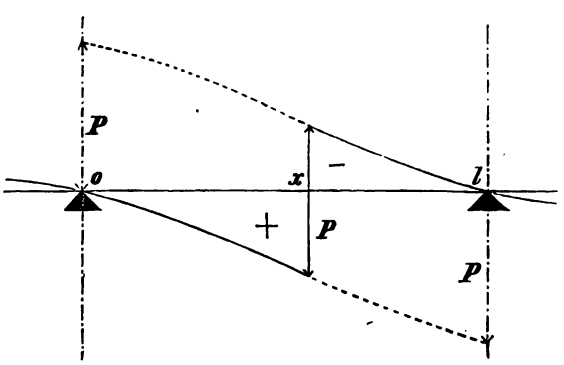
Der Beitrag einer Last P innerhalb l_s zu V_x ist nach § 21. oder nach obigem Ausdruck

92 wenn $a > x$ $v_x = \frac{1}{l_s} [m_s - m_{s+1} - P(l-a)]$

92a wenn $a < x$ $v_x = \frac{1}{l_s} [m_s - m_{s+1} + Pa \quad]$

Der erste Ausdruck liefert eine gleiche Zunahme im negativen Sinne für alle Querschnitte vor der Kraft P (§ 21.). Die Grösse der Zunahme ist abhängig vom Ort der letztern; sie ist 0 wenn $a = l$, nimmt mit abnehmendem a stetig zu und würde $-P$ für $a = 0$, wenn auch hier noch $x < a$ wäre (Fig. 20). Ist also ein bestimmter Querschnitt x angenommen und bewegt sich eine Kraft P von l aus gegen denselben, so wird das negative V_x fortwährend wachsen und am grössten sein, wenn P unendlich wenig nach x.

Fig. 20.



Eine positive Zunahme der vertikalen Schubkraft tritt ein, wenn $a < x$ (§ 21.). Dieselbe ist 0 für $a = 0$, und wächst, jemehr P ohne Verletzung der Bedingung $a < x$ gegen l rückt; sie erreicht also ihren grössten Werth, wenn P unendlich wenig vor x.

Die Curve der v_x für einen gegebenen Querschnitt x bei variabelem a und für eine bestimmte Last P (der Verlauf der Influenzcurve für die Schubkraft V_x innerhalb l_s) hat in $a = x$ eine Unstetigkeit. Es ist

$$\lim_{\delta=0} \left(v_x \right)_{a=x-\delta}^{a=x+\delta} = v'_s - v_s = P$$

Wir haben nun für die negativen und positiven Maxima der vertikalen Schubkraft in beliebigen Querschnitten x folgende Bedingungen.

A. Negatives Maximum im Querschnitt x der Oeffnung l_s:
   1) Aussenbelastung wie für das negative max M_s;
   2) stärkste Belastung von x bis l (Totalbelastung);
   3) geringste Belastung von o bis x (Eigengewicht);
   4) die Lasten zwischen x und l, besonders die grössten darunter, möglichst nahe an x;
   5) die Lasten zwischen o und x, besonders die grössten darunter, möglichst von x entfernt.

B. Positives Maximum im Querschnitt x der Oeffnung l_s:
   1) Aussenbelastung wie für das negative max M_{s+1};
   2) stärkste Belastung von 0 bis x (Totalbelastung);
   3) geringste Belastung von x bis l (Eigengewicht);
   4) zwischen o und x alle Lasten, besonders die grössten, möglichst nahe an x;
   5) zwischen x und l vorhandene Lasten, besonders die grössten, soviel als möglich von x entfernt.

Die Reaktionen der l_s begrenzenden Stützen sind nach § 7.

$$T_s = A'_{s-1} + A_s$$
$$T_{s+1} = A'_s + A_{s+1}$$

und, weil A'_{s-1}, A_s gleich den vertikalen Schubkräften für $x = l$ der Oeffnung l_{s-1} und für $x = 0$ der Oeffnung l_s mit resp. demselben und entgegengesetztem Vorzeichen (§ 7.), so folgt:

Die grösste Reaktion T_r einer Stütze tritt ein für diejenige Anordnung der Lasten am ganzen Träger, welche M_r zum negativen Maximum macht, jedoch mit dem Unterschied, dass in den beiden anliegenden Oeffnungen die Lasten — besonders die grössten derselben — der Stütze r selbst anstatt den Influenzpunkten α'_{r-1}, α_r möglichst zu nähern sind. Für die geringste Reaktion ist diese Bedingung umzukehren.

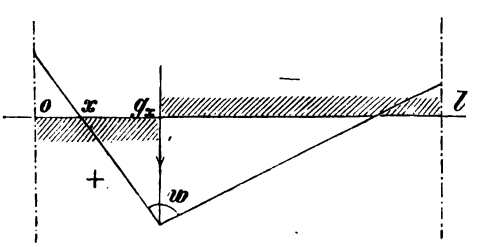
Sind nur gleichmässig vertheilte Lasten vorhanden, so kommen die Voraussetzungen 4) 5) der Maximalschubkräfte, sowie der 2te Theil der Bedingung für die Maximalreaktion nicht mehr in Betracht.

Da nach § 9. die horizontalen Schubkräfte zugleich mit den vertikalen und proportional denselben wachsen, so haben wir in Obigem auch die Bedingungen für die Maxima der erstern in beliebigen Querschnitten festgestellt.

§ 25. Momente in beliebigen Querschnitten. Positive und negative Beitragsstrecken.

Bewegt sich in der Oeffnung l_s eine Last P von o nach l, so beschreiben die mobilen Inflexionspunkte I_a, I'_a die Strecken von o bis I_s und von I'_s bis l (§ 23.). Es folgt daraus, dass durch Belastungen innerhalb l_s die negativen Momente nur in solchen Querschnitten vergrössert werden können, welche entweder zwischen o und I_s oder zwischen I'_s und l liegen (Fig. 18). Das Moment M_x in einem solchen Querschnitt nimmt durch die gleiche Last P in positivem oder negativem Sinne zu, je nachdem einer der dem Angriffspunkt a entsprechenden laufenden Inflexionspunkte zwischen dem Querschnitt x oder der nächsten oder aber beide zwischen x und der entfernteren Stütze liegen.

Fig. 21.



Denkt man sich eine Kraft P in einem solchen Punkte a wirken, dass I_a resp. I'_a (je nachdem x zwischen o und I_s oder zwischen I'_s und l liegt) mit x zusammenfällt (Fig. 21), so werden alle Lasten, welche zwischen a und der x zunächst gelegenen Stütze angreifen, in positivem, — alle Lasten, die zwischen a und der von x entfernteren Stütze wirken, in negativem Sinne zu M_x beitragen. Wir bezeichnen diesen besonderen Punkt a, welcher für jeden Querschnitt x einen bestimmten, nur von der Form des Trägers abhängigen Ort hat, durch g_x oder g'_x, je nachdem x zwischen o und I_s oder zwischen I'_s und l liegt.

Für $x = I_s$ ist $g_x = l$ und für $x = I'_s$ wird $g'_x = o$. Für Querschnitte x zwischen I_s und I'_s liegt also dieser „Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke“ nicht mehr innerhalb l_s, alle Lasten in l_s tragen zu M_x in positivem Sinne bei.

Bewegt sich ein Querschnitt von o nach I_s oder von I'_s nach l, so beschreibt der Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke g_x oder g'_x den ganzen Weg von o nach l.

Auf analytischem Wege findet sich dasselbe Resultat so. Nach § 21. ist

$$\text{für } a > x \quad m_x = m_s - v_s x$$
$$\text{für } a < x \quad m_x = m_s - v'_s x + Pa$$

aber nach 97, 98 mit 92, 92a

$$m_s = v_s I_a$$
$$Pa + m_s = v'_s I'_a$$

also

$$\text{für } a > x \quad m_x = v_s (I_a - x)$$
$$\text{für } a < x \quad m_x = v'_s (I'_a - x)$$

Da nun v_s stets negativ und v'_s immer positiv (§ 23.), so wird

$$\text{für } a > x \quad m_x \gtreqless 0 \text{ je nachdem } I_a \lesseqgtr x$$

$$\text{für } a < x \quad m_x \gtreqless 0 \text{ je nachdem } I'_a \gtreqless x$$

und weil zwischen I_s und I'_s niemals $I_a > x$ oder $I'_a < x$, so kann daselbst nie $m_x < 0$ werden, sondern es wird stets positiv sein.

Nach 97, 98 findet sich je nachdem x zwischen o und I_s oder zwischen I'_s und l

$$g_x \text{ als } a \text{ aus } I_a = \frac{m_s}{m_s - m_{s+1} - P(l-a)} \quad l_s = x$$

$$g'_x \text{ als } a \text{ aus } I'_a = \frac{m_s + Pa}{m_s - m_{s+1} + Pa} \quad l_s = x$$

Substituirt man demgemäss die Werthe von m_s, m_{s+1} nach 88, 89 und setzt zur Abkürzung

99
$$\begin{cases} l_s - x + B'_s x = h \\ l_s - x + B_s x = k \\ B_s - B'_s \quad\quad = \beta \end{cases}$$

so wird in der beliebigen Oeffnung l_s für einen Querschnitt x, wenn

100 $x < I_s$
$$g_x = \frac{h + \frac{1}{2} kB'_s - \sqrt{(h + \frac{1}{2} kB'_s)^2 - (kB'_s - h)\, x\beta}}{k - kB'_s} \, l_s$$

101 $x > I'_s$
$$g'_x = \frac{\frac{3}{2} h - \sqrt{\frac{9}{4} h^2 - (h - kB'_s)(2 + B_s)h}}{h - kB'_s} \, l_s$$

Diese Formeln ergeben ebenfalls wie bereits festgestellt

$$\text{für } x = 0 \qquad g_x = 0$$
$$x = I_s = \frac{l_s}{1 - B_s} \qquad g_x = l$$
$$x = I'_s = \frac{l_s}{1 - B'_s} \qquad g'_x = 0$$
$$x = l \qquad g'_x = l$$

Die Vorzeichen der Wurzelausdrücke sind durch analoge Discussion wie in § 19. bestimmt.

§ 26. Influenzpunkte.

Im vorigen Kapitel wurde dargethan, dass in jeder Oeffnung l_s, für jeden Querschnitt x zwischen 0 und I_s oder zwischen I'_s und l, ein Punkt g_x oder g'_x existirt von der Art, dass alle Lasten, welche von diesem Punkte bis zur x am nächsten gelegenen Stütze wirken, in positivem, — die Lasten aber, welche von dem Punkte bis zur von x entfernteren Stütze angreifen, in negativem Sinne zu M_x beitragen.

Es ist nun nicht gleichgültig, an welcher Stelle der negativen oder positiven Beitragsstrecke eine Kraft angreift. An den Enden der Strecken ist der Beitrag 0, in gewissen Punkten werden Maxima eintreten. Für die Querschnitte $x = 0$ und $x = l$ haben wir die Orte solcher Punkte bereits als α_s und α'_s gefunden (§ 22.). Das negative Moment M_s nimmt zu oder ab, je nachdem sich die Lasten in l_s dem Punkte α_s nähern oder sich von ihm entfernen.

Es wurde ferner gezeigt, wie der Wirkungsgrad der Belastungen aller Oeffnungen auf jedes Stützenmoment M_s und damit auf die Momente und Schubkräfte am ganzen Träger mit diesen nur von der Form des Trägers abhängigen Punkten in Beziehung steht (§ 19.) und wir haben α_s, α'_s „feste Influenzpunkte“ der Oeffnung l_s genannt.

Den Punkt, in welchem angreifend eine gegebene Last P den grössten negativen Beitrag zu dem Moment M_x im Querschnitt x liefert, wollen wir „laufenden Influenzpunkt“ des Querschnitts x nennen und ihn durch α_x, α'_x bezeichnen, je nachdem x zwischen o und I_s oder aber zwischen I'_s und l liegt.

Soll der Beitrag einer Kraft P zu M_x für einen Querschnitt zwischen o und I_s oder zwischen I'_s und l negativ sein, so ist im ersten Falle nöthig, dass $a > x$ (sogar grösser als g_x), — im zweiten Fall, dass $a < x$ (sogar kleiner als g'_x) sei; also sind die negativen Zunahmen ausgedrückt

91 für $x < I_s$ $\quad m_x = m_s + \frac{x}{l_s}\,[m_{s+1} - m_s + P(l - a)]$

91a für $x > I'_s$ $\quad m_x = m_s + \frac{x}{l_s}\,[m_{s+1} - m_s - Pa] + Pa$

Substituirt man m_s, m_{s+1} nach 88, 89 und stellt die Bedingung für Maxima und Minima auf, so finden sich α_x, α'_x als diejenigen Punkte a, welche der Gleichung $\frac{dm_x}{da} = 0$ Genüge leisten. Ihre Abscissen sind mit Benutzung der abkürzenden Bezeichnungen 99

102 $$\alpha_x = \frac{h - \sqrt{h^2 - \frac{1}{3}(h - kB_s)(2h + kB_s - \beta x)}}{h - kB_s} l_s \quad (x < I_s)$$

103 $$\alpha'_x = \frac{h - \sqrt{h^2 - \frac{1}{3}(h - kB'_s)(2h + kB'_s - \beta(l-x)}}{h - kB'_s} l_s \quad (x > I'_s)$$

Die Vorzeichen der Wurzelausdrücke folgen aus der Bedingung, dass bei $x = 0$ und $x = l$ α_x, α'_x in α_s, α'_s übergehen müssen.

Für $x = 0$ wird $h = k = l_s$ und durch Substitution in 102

76 $$\alpha_x = \alpha_s = \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{3}(1 - B'_s)(2 + B'_s)}}{1 - B'_s} l_s$$

Für $x = I_s = \frac{l_s}{1 - B_s}$ wird $h = -\frac{\beta l}{1 - B_s}$, $k = 0$, $\alpha_x = l$

Für $x = I'_s = \frac{l_s}{1 - B'_s}$ wird $h = 0$, $k = \frac{\beta l_s}{1 - B'_s}$, $\alpha'_x = 0$

Für $x = l$ wird $h = B'_s l$, $k = B_s l$ (beide negativ) und

77 $$\alpha'_x = \alpha'_s = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{3}(1 - B_s)(2 + B_s)}}{1 - B_s} l_s$$

Da sich nun α_x, α'_x mit x stetig ändern, so folgt der Satz:

Bewegt sich ein Querschnitt x von o nach I_s (oder von I'_s nach l), so beschreibt der laufende Influenzpunkt α_x (oder α'_x) die Strecke zwischen dem festen Influenzpunkt α_s (oder α'_s) und der von x entfernteren Stütze. Die Punkte x und α_x (oder α'_x) bewegen sich in gleicher Richtung.

Während g_x von 0 nach l oder g'_x von l nach 0 rückt, kommt α_x von α_s nach l oder α'_x von α'_s nach 0. Es ist also

für $x < I_s$ stets $\alpha_x > g_x$
„ $x > I'_s$ stets $\alpha'_x < g'_x$

wie für negative Zunahmen nothwendig.

Aus Vergleichung von 76, 77 und 95, 96 folgt

$$\alpha_s < \frac{l_s}{1 - B'_s} \quad (= I'_s)$$

$$\alpha'_s > \frac{l_s}{1 - B_s} \quad (= I_s)$$

Die festen Influenzpunkte liegen also innerhalb der Strecke zwischen den festen Inflexionspunkten.

Wie die festen Inflexionspunkte spezielle Fälle der laufenden Inflexionspunkte, wenn nämlich die Kraft über einer Stütze angreift ($a = 0$ oder l), so sind die festen Influenzpunkte spezielle Fälle der laufenden Influenzpunkte, wenn nämlich der Querschnitt über einer Stütze liegt ($x = 0$ oder l).

Den Punkt, in welchem angreifend, ein Last den grössten positiven Beitrag zum Moment M_x, für x zwischen o und I_s oder zwischen I'_s und l, liefert, werden wir in § 28. angeben.

§ 27. Maxima der negativen Momente in beliebigen Querschnitten.

Wir betrachten eine beliebige Oeffnung l_s. Es sollen die Belastungsverhältnisse ermittelt werden, unter welchen das Moment in irgend einem gegebenen Querschnitt x sein negatives Maximum erreicht. Untersuche man zuerst die Wirkung der Lasten in den von

Fig. 22.

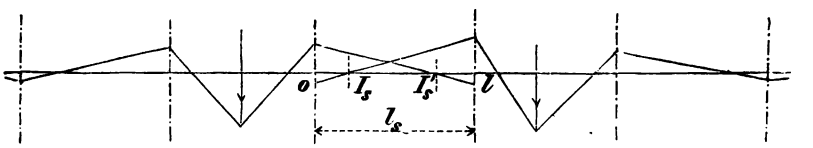
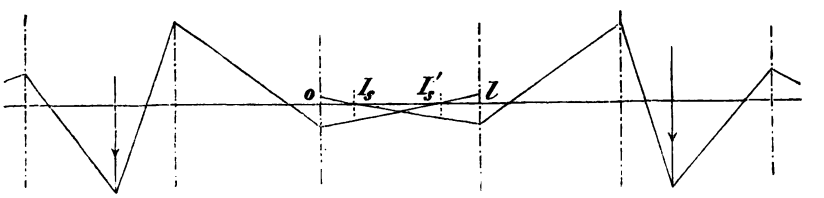


Fig. 23.



l_s verschiedenen Oeffnungen, der Aussenbelastung in Bezug auf l_s. Diese Wirkung ist verschieden, je nachdem x zwischen o und I_s, I_s und I_s' oder I_s' und l liegt. So nehmen z. B., wenn wir nur den Einfluss der beiden anliegenden Oeffnungen ins Auge fassen, die negativen Momente (siehe Fig. 22)

von 0 bis I_s
zu durch Belastung von l_{s-1}
ab „ „ „ l_{s+1}
von I_s bis I_s'
zu durch Belastung von l_{s-1}
zu „ „ „ l_{s+1}
von I_s' bis l
ab durch Belastung von l_{s-1}
zu „ „ „ l_{s+1}

Die Belastungen der auf l_{s-1} und l_{s+1} nach links und rechts folgenden Oeffnungen haben genau die entgegengesetzte Wirkung (Fig. 23) und allgemein nehmen (immer abgesehen von der Belastung in l_s selbst) die Momente in negativem Sinne zu

zwischen o und I_s durch Belastung aller Oeffnungen $l_{s-2\pi-1}$ und $l_{s+2\pi}$

zwischen I_s und I_s' „ „ „ „ $l_{s-2\pi-1}$ und $l_{s+2\pi+1}$

zwischen I'_s und l durch Belastung aller Oeffnungen $l_{s-2\pi}$ und $l_{s+2\,\pi+1}$

Die Belastungen der respective übrigen Oeffnungen bewirken Abnehmen in negativem d. h. Wachsen in positivem Sinne.

Der Einfluss jeder einzeln Last oder jedes Lastelements P innerhalb l_s auf das negative Moment in Querschnitten zwischen o und I_s oder I'_s und l ist in den §§ 25., 26. betrachtet worden. Von I_s bis I'_s werden die negativen Momente durch jede in l_s angreifende Last vermindert.

Somit sind Voraussetzungen für grösste negative Momente in beliebigen Querschnitten x irgend welcher Oeffnung l_s,

A. wenn x zwischen o und I_s:
   1) Aussenbelastung wie für das negative max M_s;
   2) grösste Gesammtlast von g_x bis l (Totalbelastung);
   3) geringste Gesammtlast von o bis g_x (Eigengewicht);
   4) zwischen g_x und l dichte Gruppirung aller Lasten, besonders der grössten darunter, um den Influenzpunkt α_x;
   5) zwischen o und g_x Entfernung etwa vorhandener Lasten, besonders der grössten vom Querschnitt x;

B. wenn x zwischen I_s und I'_s:
   1) Aussenbelastung der vorhergehenden Oeffnungen wie für das negative max M_s, der folgenden wie für ein negatives max M_{s+1};
   2) möglichst geringe Belastung der Oeffnung l_s (Eigengewicht);
   3) Entfernung vorhandener Lasten, besonders der grössten, vom Querschnitt x;

C. wenn x zwischen I'_s und l:
   1) Aussenbelastung wie für das negative max M_{s+1};
   2) stärkste Belastung von o bis g'_x (Totalbelastung);
   3) geringste Belastung von g'_x bis l (Eigengewicht);
   4) zwischen o und g'_x dichteste Gruppirung der Lasten, besonders der grössten, um den Influenzpunkt α'_x;
   5) zwischen g'_x und l möglichste Entfernung vorhandener Lasten, besonders der grössten, vom Querschnitt x.

Die Bedingungen für das Maximum irgend eines Stützenmoments (max M_s) sind in § 19. angegeben. Die Voraussetzungen A 4, 5, B 3, C 4, 5 kommen nur bei concentrirten oder ungleichmässig vertheilten Lasten in Betracht, A 5, B 3, C 5 folgen aus § 28. Die Punkte g_x, g'_x sind in § 25. bestimmt, α_x, α'_x haben die Werthe 102, 103.

§ 28. Maxima der positiven Momente in beliebigen Querschnitten.

Nach dem in § 27. Gesagten nehmen für Querschnitte x innerhalb l_s (abgesehen von der Belastung dieser Oeffnung selbst) die Momente in negativem Sinne ab, d. h. in positivem Sinne zu, wenn x

zwischen o und I_s durch Belastung aller Oeffnungen $l_{s-2\pi}$ und $l_{s+2\pi+1}$

zwischen I_s und I_s' „ „ „ „ $l_{s-2\pi}$ und $l_{s+2\pi}$

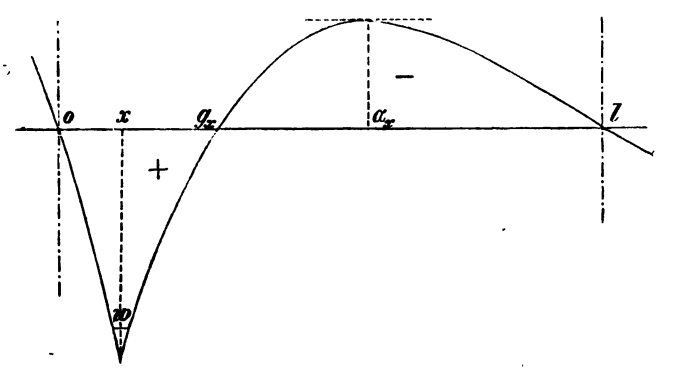
zwischen I_s' und l „ „ „ „ $l_{s-2\pi-1}$ und $l_{s+2\pi}$

Da die laufenden Inflexionspunkte einer Kraft P überall zwischen o und I_s und zwischen I_s' und l liegen können, so ist klar, dass eine Vergrösserung des Moments M_x in positivem Sinne durch Lasten in l_s für jeden Querschnitt möglich ist. Greift eine Last bei a an, so wächst das Moment M_x gegen das Positive

$$\begin{aligned} \text{für } o < x < I_s &\text{ wenn } o < a < g_x \\ \text{„ } I_s < x < I_s' &\text{ „ } o < a < l \\ \text{„ } I_s' < x < l &\text{ „ } g_x' < a < l \end{aligned}$$

Hierbei ist nicht gleichgültig, in welchem Punkte der positiven Beitragsstrecke P angreift. Der Einfluss ist o, wenn a mit einem der Endpunkte zusammenfällt, er nimmt für irgend einen Punkt seinen grössten Werth an. Dieser Punkt ist zu bestimmen.

Fig. 24.



Bewegt sich eine Last von o nach l und trägt man über jedem a den ihm entsprechenden Beitrag zum Moment M_x an (Fig. 24), so erhält man eine Curve der Zunahme m_x des Moments im Querschnitt x bei variabelem a. Diese Curve (ein Theil der Influenzcurve für das Moment M_x) schneidet die Abscissenachse bei $a = 0$, $a = g_x$

(oder g'_x) und $a = l$; sie erreicht ihr negatives Maximum bei $a = \alpha_x$ (oder α'_x). Der ganze negative Theil fällt weg, wenn x zwischen I_s und I'_s, der ganze positive Theil verschwindet, wenn $x = 0$ oder l. Wie in § 25. gezeigt, hat man für die Zunahme m_x

$$\text{für } a > x \quad m_x = v_s (I_a - x) = m_s - v_s x$$
$$\text{für } a < x \quad m_x = v'_s (I'_a - x) = m_s - v'_s x + Pa$$

Innerhalb der positiven Beitragsstrecke ist stets $x > I_a$ und $x < I'_a$ (§ 25.); da nun v_s negativ und v'_s positiv (§ 22.), so wird m_x um so grösser und positiv, je grösser für $a > x$ die negativen Werthe v_s und $I_a - x$, — und je grösser für $a < x$ die positiven Werthe v'_s und $I'_a - x$ sind, d. h. es wird allgemein der positive Beitrag m_x einer bestimmten Kraft P zum Moment M_x um so grösser, jemehr sich P dem Querschnitt x nähert. Der Punkt x spielt also für positive Beiträge zum Moment M_x eine ähnliche Rolle, wie der Influenzpunkt α_x (oder α'_x) in Bezug auf negative Beiträge. Durch Differenziation wird

$$\text{für } a > x \quad \frac{dm_x}{da} = \frac{dm_s}{da} - x \frac{dv_s}{da}$$

$$\text{für } a < x \quad \frac{dm_x}{da} = \frac{dm_s}{da} - x \frac{dv'_s}{da} + P$$

und weil $v'_s - v_s = P$ (§ 22.), also $dv'_s = dv_s$, so muss die Curve der m_x bei $a = x$ eine Ecke haben. Die Tangente überschlägt einen Winkel, für welchen

$$\text{tang } w = \lim_{\delta=0} \left(\frac{dm_x}{da}\right)_{a=x-\delta}^{a=x+\delta} = P$$

Maxima und Minima der Influenzcurven treten bei Influenzpunkten, Curvenecken (Influenzcurven der Momente) und Unstetigkeiten (Influenzcurven der Schubkräfte) im Querschnitt x ein. (Taf. II.)

Wir haben nun als Vorbedingungen für grösste positive Momente in beliebigen Querschnitten x irgend einer Oeffnung l_s,

A. wenn x zwischen o und I_s:
   1) Aussenbelastung wie für das negative max M_{s+1};
   2) grösste Gesammtlast von o bis g_x (Totalbelastung);
   3) kleinste Gesammtlast von g_x bis l (Eigengewicht);
   4) von o bis g_x dichte Gruppirung der Lasten, besonders der grössten darunter, um den Querschnitt x;
   5) von g_x bis l Entfernung der Lasten, besonders der grössten, vom Influenzpunkt α_x;

B. wenn x zwischen I_s und I'_s:
   1) Aussenbelastung der vorhergehenden Oeffnungen wie für das negative max M_{s+1}, der folgenden wie für ein negatives max M_s;

2) möglichst grosse Gesammtlast innerhalb l_x (Totalbelastung);
3) engste Gruppirung aller Lasten, besonders der grössten, um den Querschnitt x;

C. wenn x zwischen l'_x und l:
1) Aussenbelastung wie für das negative max M_x;
2) grösste Gesammtlast von g'_x bis l (Totalbelastung);
3) geringste Belastung von o bis g'_x (Eigengewicht);
4) zwischen g'_x und l dichte Gruppirung, besonders der grössten Lasten um den Querschnitt x;
5) zwischen o und g'_x möglichste Entfernung der Lasten, besonders der grössten, vom Influenzpunkt α'_x.

Die Bemerkung mit Nachweis am Schlusse des § 27. gilt auch hier.

§ 29. Ungünstigste Belastungen.

Unter „ungünstigster Belastung" für den Querschnitt x verstehen wir eine solche Anordnung der Lasten am ganzen Träger, bei welcher entweder M_x oder V_x seinen absolut grössten Werth erreicht.

Von jeder Beurtheilung a priori abgesehen, hätte man also für alle Querschnitte die negativen und positiven Maxima von M_x und V_x zu bestimmen, womit auch ihre absolut grössten Werthe bekannt wären.

Es lässt sich jedoch stets für die meisten Querschnitte auf den Sinn des absolut grössten Moments und der absolut grössten vertikalen Schubkraft aus den zu erwartenden Belastungen schliessen. Die absoluten Maximalmomente werden über und bei den Stützen negativ, um die Mitten der Oeffnungen aber positiv sein. Dort liegt das Krümmungscentrum unterhalb, hier oberhalb des Trägers.

Die absolut grössten vertikalen Schubkräfte sind, ganz abnorme Fälle ausgenommen, negativ für Querschnitte in der Nähe der linken, positiv für solche in der Nähe der rechten Stütze.

Am zweckmässigsten verfährt man bei continuirlichen Trägern, indem man die Curven der negativen und positiven Maximalmomente, sowie die Curven der negativen und positiven Maxima der vertikalen Schubkräfte durch eine genügende Anzahl Punkte wenigstens theilweise bestimmt. Alsdann sind nicht nur die absolut grössten M_x und V_x für jeden Querschnitt sofort zu ersehen, sondern es lässt sich gleichzeitig beurtheilen, ob im betreffenden Querschnitt ein Moment oder eine Schubkraft entgegengesetzten Sinnes vorkommen kann, und

eventuell, welches der Maximalwerth desselben oder derselben ist (Taf. II.)

Interessiren nur die absolut grössten Momente, wie bei Dimensionenbestimmungen, so kann man die negativen und positiven Maxima auf der gleichen Seite der Abscissenachse auftragen (Taf. IV); man beginnt die Curve der negativen Maximalmomente bei den Stützen, die der positiven in Mitte der Oeffnungen und braucht dann den Verlauf beider nur bis zu den gegenseitigen Schnittpunkten zu verfolgen.

Analoges gilt für die Curven der Maximalschubkräfte, doch ist es bei Berechnung von Fachwerken nöthig, beide Maxima von V_x zu kennen.

§ 30. Gültigkeit der Formeln und Sätze des zweiten Abschnitts.

Die Theorien des zweiten Abschnitts sind zunächst für Träger konstanten Querschnitts abgeleitet und haben für solche mathematische Genauigkeit, wenn die Bedingungen der allgemeinen Biegungsformel (§§ 1., 2.) erfüllt sind.

Für Träger veränderlichen Querschnitts, die den gleichen Bedingungen unterworfen sind, gilt sofort alles Gesagte sehr angenähert, aber es können auch die genauen Verhältnisse durch ganz analoge Schlüsse etablirt werden. Die Aufstellung der Gleichungen liefert auch hier ein lineares Bedingungssystem der Stützenmomente, ähnlich dem System 63, nur sind die R anders ausgedrückt und treten an Stelle der l gewissermaassen modifizirte l auf. Die Festsetzung der λ-Systeme ist dann ganz wie in § 17. und die übrige Berechnung, sowie die Bestimmung der Inflexionspunkte und Grenzpunkte der Beitragsstrecken unterscheiden sich nicht mehr wesentlich von den gleichen Operationen bei Trägern konstanten Querschnitts. In § 51. ist dies alles für einen continuirlichen Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt durchgeführt.

Was die Sätze betrifft, welche in den §§ 19., 24., 27., 28. betreffs der grössten Momente und Schubkräfte gegeben wurden, so gelten dieselben ganz ebenso für Träger variabeln Querschnitts. Die Wirkung der Veränderlichkeit tritt nur darin hervor, dass sich die Inflexionspunkte I, I', sowie die Grenzpunkte der Beitragsstrecken g, g' und die Influenzpunkte α, α' etwas verschoben haben.

Sobald die λ-Systeme für den Träger veränderlichen Querschnitts aufgestellt sind (Beisp. § 51.) hat man die B, B' nach 69, die Inflexionspunkte nach 95—98 und die Grenzpunkte der Beitragsstrecken nach 99—101. Wäre es wünschenswerth, auch die neuen Influenzpunkte zu kennen, so hätte man nur m_s, m_{s+1} wie in § 22. abzu-

leiten und die Schlüsse des § 26. mit den gefundenen Werthen zu wiederholen. Es liegt aber kein praktischer Grund hierzu vor. Die Verrückung der Punkte ist zu gering und im Falle ihrer Verwendung können die für konstanten Querschnitt berechneten Orte immer beibehalten werden.

Ein theoretisches Interesse ist ebenso wenig vorhanden. Alle Verhältnisse, auch für Träger variabeln Querschnitts, lassen sich nach den Aufstellungen für prismatische Träger vollständig übersehen; es genügt, noch zu wissen, in welchem Sinne die Resultate durch die Veränderlichkeit modificirt werden. Dies wollen wir in § 52. angeben. Damit ist alles theoretisch und praktisch Wissenswerthe erschöpft.

III. Abschnitt.

Spezielle Belastungsarten. Einfache Träger im Besonderen.

§ 31. Belastungsarten und Belastungsfälle.

Unter „Belastungsart“ soll verstanden sein der Charakter der Lasten selbst, ob sie in einzeln, durch messbare Strecken von einander getrennten Punkten concentrirt, ob gesetzmässig oder gesetzlos vertheilt, angreifen. (§ 2.) Wir fragen: wie wirken die Lasten? „Belastungsfall“ dagegen bedeute die Anordnung der bereits definirten Lasten am Träger. Wir fragen: wo wirken die Lasten?

Das Schema in § 49. gibt nur eine Belastungsart, nämlich auf gewisse Strecken gleichmässig vertheilte Lasten, aber 13 Belastungsfälle, welche zur vollständigsten Berechnung des dort angenommen continuirlichen Trägers nöthig sind, und deren Wahl von den Gesetzen der §§ 19., 24., 27., 28. diktirt wird.

Die bis jetzt abgeleiteten Formeln gelten für jede Belastungsart und für alle Belastungsfälle, die P können Lasten oder Lastelemente sein, die a auf beliebigen Strecken in messbaren Abständen oder stetig auf einander folgen. Alle Formeln können in dieser Gestalt direkt verwendet werden, wenn man sich die etwa vorkommenden vertheilten Lasten in einzeln Punkten concentrirt denkt, wie die graphische Statik stets verfährt. Analytisch ist dies nur bei einfachen Trägern bequem, bei continuirlichen würde man selbst eine ganz gesetzlos vertheilte Last besser durch eine gleichmässig vertheilte und wenig concentrirte ersetzen.

Wird eine Voraussetzung über die Belastungsart getroffen, so können die in den allgemeinen Formeln vorkommenden Summenausdrücke (Σ) näher präcisirt werden. Dies wollen wir in den nächsten Kapiteln thun. Die Formeln gelten auch dann noch für einfache und continuirliche Träger und für alle Belastungsfälle. Wir beschränken uns aber auf Träger konstanten Querschnitts, da alle durch die Veränderlichkeit bedingten Abweichungen in den §§ 13., 14. angegeben sind, und noch an einem Beispiel (§ 51.) vollständig erläutert werden sollen.

§ 32. Träger mit beliebiger Belastung.

Es sind hier nur die Formeln zusammenzustellen, welche schon im I. Abschnitt gefunden wurden. In den folgenden Paragraphen geben wir dann an, welche Werthe bei besondern Belastungsarten für die Summenausdrücke zu substituiren sind. Die Gleichungen gelten für continuirliche und einfache Träger, wobei die M 0 werden können.

Bei n Zwischenstützen (Taf. IV, Fig. 2) existiren n Pfeilermomente, für welche n Gleichungen von der Form:

17 $$M_{r-1} l_{r-1} + 2 M_r (l_{r-1} + l_r) + M_{r+1} l_r = -\left[\frac{c_{r-1}-c_r}{l_{r-1}} + \frac{c_{r+1}-c_r}{l_r}\right] 6 E\Theta - \frac{1}{l_{r-1}} \sum_{r-1} Pa(l-a)\ (l+a) - \frac{1}{l_r} \sum_{r} Pa\,(l-a)\,(2l-a)$$

Sind die Trägerenden unter Winkeln eingespannt, deren Tangenten τ_0, τ_{n+1}, so kommen noch zwei Widerlagermomente hinzu, wofür zwei weitere Gleichungen nöthig:

18 $$2 M_0 l_0 + M_1 l_0 = \left[\tau_0 - \frac{c_1 - c_0}{l_0}\right] 6 E\Theta - \frac{1}{l_0} \sum_{0} Pa(l-a)(2l-a)$$

19 $$M_n l_n + 2 M_{n+1} l_n = \left[\frac{c_{n+1}-c_n}{l_n} - \tau_{n+1}\right] 6 E\Theta - \frac{1}{l_n} \sum_{n} Pa(l-a)(l+a)$$

Innerhalb jeder einzeln Oeffnung vertikale Schubkräfte unmittelbar bei den Stützen:

20 $$V_0 = -A = \frac{1}{l}\left[M - M' - \sum^{i} P(l-a)\right]$$

21 $$V_i = A' = \frac{1}{l}\left[M - M' + \sum^{i} Pa\right]$$

Moment und vertikale Schubkraft in einem beliebigen Querschnitt x

10 $$M_x = M + Ax - \sum^{x} P\,(x-a)$$

7 $$V_x = \sum^{x} P - A$$

Maximalmomentenpunkt $x = \mu$ innerhalb einer Oeffnung aus

25 $$\sum^{x} P = A \text{ d. h. } V_x = 0$$

Positives Maximalmoment in einer Oeffnung

27 $$M_\mu = M + A\mu - \sum^{\mu} P\,(\mu-a)$$

Spezifische horizontale (und vertikale) Schubkraft für die ganze Breite in Entfernung η von der neutralen Schicht:

28 $$H_\eta = -\frac{\nu_x}{\Theta}\sum_\eta^a \mathfrak{F}\eta$$

Reaktion einer beliebigen Stütze r:

24 $$T_r = A_{r-1} + A_r$$

Damit ist alles bekannt, was für praktische Berechnungen gewöhnlich verlangt wird. Genaueres über die einzeln Grössen ist in den betreffenden Kapiteln des I. Abschnitts zu ersehen.

Für besondere Fälle können noch von Interesse sein:
Die Gleichung der elastigen Linie

14 $$y = c + \tau x - \frac{1}{6E\Theta}\left[3Mx^2 + Ax^3 - \sum_1^x P(x-a)^3\right]$$

Der Ort der grössten Einsenkung

44 $$\mathfrak{e} \text{ aus } o = \tau - \frac{c'-c}{l} - \frac{1}{2E\Theta}\left[2M\mathfrak{e} + A\mathfrak{e}^2 - \sum_1^{\mathfrak{e}} P(\mathfrak{e}-a^2)\right]$$

Der Werth der grössten Einsenkung

45 $$\mathfrak{E} = \left[\tau - \frac{c'-c}{l}\right]\mathfrak{e} - \frac{1}{6E\Theta}\left[3M\mathfrak{e}^2 + A\mathfrak{e}^3 - \sum_1^{\mathfrak{e}} P(\mathfrak{e}-a)^3\right]$$

In diesen Gleichungen ist τ an Einspannungsstellen bekannt, sonst

15 $$\tau = \frac{c'-c}{l} + \frac{1}{6E\Theta}\left[Ml + 2M'l + \frac{1}{l}\sum_1^i Pa(l-a)(2l-a)\right]$$

§ 33. Concentrirte Lasten alleln.

Die concentrirten Lasten innerhalb einer Oeffnung l_s seien bis zum beliebigen Querschnitt x $P_1, P_2, \ldots P_z$ und von o bis l $P_1, P_2, \ldots P_m$, bei $a_1, a_2, \ldots a_m$ angreifend. Selbstverständlich ist z nicht für alle Querschnitte gleich und kann m in jeder Oeffnung einen andern Werth haben. Es gelten die Formeln des vorigen Paragraphen und ist in jeder bestimmten Oeffnung l_s

$$\sum_s Pa\,(l-a)\,(l+a) = \sum_1^m Pa\,(l-a)\,(l+a)$$

$$\sum_s Pa\,(l-a)\,(2l-a) = \sum_1^m Pa\,(l-a)\,(2l-a)$$

$$\sum_s^i P\,(l-a) = \sum_1^m P\,(l-a)$$

$$\sum_s^i Pa = \sum_1^m Pa$$

$$\sum_s^x P\,(x-a) = \sum_1^z P\,(x-a)$$

$$\sum_s^x P = \sum_1^z P$$

worin z. B. wie ohne Weiteres klar

$$\sum_1^m Pa = P_1 a_1 + P_2 a_2 + \cdots + P_m a_m$$

$$\sum^x P\,(x -)^2 = \sum_1^s P\,(x - a)^2$$

$$\sum^x P\,(x -)^3 = \sum_1^z P\,(x - a)^3$$

§ 34. Gesetzmässig vertheilte Lasten allein.

Die Last heisst dann auf einer Strecke „gesetzmässig vertheilt“ wenn in jedem Punkt der Strecke die Belastung per Längeneinheit durch dieselbe Gleichung (das Gesetz der Vertheilung) ausgedrückt ist. Die P sind Lastelemente, die Angriffspunkte a folgen stetig aufeinander.

Es sei die vertheilte Last per Längeneinheit

$$\text{von } a = o \text{ bis } a = g \quad u = \mathfrak{f}(a)$$
$$\text{von } a = g \text{ bis } a = l \quad u' = \varphi(a)$$

wo g, $\mathfrak{f}$, φ in jeder Oeffnung verschieden sein können. Dann ist

$$\text{von } o \text{ bis } g \text{ bei } a \quad P = \mathfrak{f}(a)\,da$$
$$\text{von } g \text{ bis } l \text{ bei } a \quad P = \varphi(a)\,da$$

Die Formeln des § 32. gelten mit folgenden Substitutionen:

$$\Sigma Pa\,(l - a)\,(l + a) = \int_0^g a\,(l - a)\,(l + a)\,\mathfrak{f}(a)\,da + \int_g^l a\,(l - a)\,(l + a)\,\varphi(a)\,da$$

$$\Sigma Pa\,(l - a)\,(2l - a) = \int_0^g a\,(l - a)\,(2l - a)\,\mathfrak{f}(a)\,da + \int_g^l a\,(l - a)\,(2l - a)\,\varphi(a)\,da$$

$$\sum^l P\,(l - a) = \int_0^g (l - a)\,\mathfrak{f}(a)\,da + \int_g^l (l - a)\,\varphi(a)\,da$$

$$\sum^l Pa = \int_0^g a\,\mathfrak{f}(a)\,da + \int_g^l a\,\varphi(a)\,da$$

ferner wenn $x < g$:

$$\sum^x P\,(x - a) = \int_0^x (x - a)\,\mathfrak{f}(a)\,da$$

$$\sum^x P = \int_0^x \mathfrak{f}(a)\,da$$

und wenn $x > g$:

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a) = \int_0^g (x-a)\,\mathfrak{f}(a)\,da + \int_g^x (x-a)\,\varphi(a)\,da$$

$$\overset{x}{\Sigma} P = \int_0^g \mathfrak{f}(a)\,da + \int_g^x \varphi(a)\,da$$

Für die praktisch weniger wichtigen Formeln am Ende des § 32. kommen hierzu noch folgende Werthe

wenn $x < g$:

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^2 = \int_0^x (x-a)^2\,\mathfrak{f}(a)\,da$$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^3 = \int_0^x (x-a)^3\,\mathfrak{f}(a)\,da$$

wenn $x > g$:

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^2 = \int_0^g (x-a)^2\,\mathfrak{f}(a)\,da + \int_g^x (x-a)^2\,\varphi(a)\,da$$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^3 = \int_0^g (x-a)^3\,\mathfrak{f}(a)\,da + \int_g^x (x-a)^3\,\varphi(a)\,da$$

Wäre nur ein Vertheilungsgesetz auf der ganzen Länge der Oeffnung gültig, so würden alle Summenausdrücke zu einzeln Integralen; gelten dagegen innerhalb der Oeffnung auf einer willkürlich gegebenen Anzahl Strecken lauter verschiedene Gesetze, so zerfällt jeder Summenausdruck (ganz wie oben in zwei) in ebensoviel Partialintegrale als Gesetze bestehen.

Sobald die Funktionen $\mathfrak{f}(a)$, $\varphi(a)$ gegeben sind, können die Integrale ausgeführt und der Träger berechnet werden.

§ 35. Gleichmässig vertheilte Lasten allein.

Die Last auf einer Strecke heisst „gleichmässig vertheilt," wenn in allen Punkten der Strecke die Belastung pro Längeneinheit konstant ist. Wir haben also hier gesetzmässig vertheilte Lasten, für welche $\mathfrak{f}(a)$, $\varphi(a)$ bestimmt sind, die Integrale können ausgeführt werden.

Die gleichmässig vertheilte Last pro Längeneinheit in irgend einer Oeffnung l_s sei

u von $a = o$ bis $a = g$

u' von $a = g$ bis $a = l$

wo u, u', g in jeder Oeffnung andre Werthe haben können. Dann ist

von o bis g bei a $\quad P = u\,da$

von g bis l bei a $\quad P = u'\,da$

und die Vornahme der Integrationen ergibt folgende Werthe, mit welchen die Formeln des § 32. Gültigkeit haben:

$$\overset{s}{\Sigma} P\, a\,(l-a)\,(\,l+a) = \tfrac{1}{4}\,u'\,l^4 + \tfrac{1}{4}\,g^2\,(u-u')\,(2l^2-g^2)$$

$$\overset{s}{\Sigma} P\, a\,(l-a)\,(2l-a) = \tfrac{1}{4}\,u'\,l^4 + \tfrac{1}{4}\,g^2\,(u-u')\,(2l-g)^2$$

$$\overset{l}{\Sigma} P\,(l-a) = \tfrac{1}{2}\,u'\,l^2 + \tfrac{1}{2}\,g\,(u-u')\,(2l-g)$$

$$\overset{l}{\Sigma} P\, a = \tfrac{1}{2}\,u'\,l^2 + \tfrac{1}{2}\,g^2\,(u-u')$$

ferner wenn $x < g$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a) = \tfrac{1}{2}\,u x^2$$

$$\overset{x}{\Sigma} P = u x$$

und wenn $x > g$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a) = \tfrac{1}{2}\,u'\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,g\,(u-u')\,(2x-g)$$

$$\overset{x}{\Sigma} P = u'x + g\,(u-u')$$

Für die Formeln am Schlusse des § 32. (14, 44, 45) wären noch nöthig:

wenn $x < g$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^2 = \tfrac{1}{3}\,u x^3$$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^3 = \tfrac{1}{4}\,u x^4$$

wenn $x > g$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^2 = \tfrac{1}{3}\,u'x^3 + \tfrac{1}{3}\,g\,(u-u')\,(3x^2 - 3gx + g^2)$$

$$\overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^3 = \tfrac{1}{4}\,u'x^4 + \tfrac{1}{4}\,g\,(u-u')\,(4x^3 - 6gx^2 + 4g^2x - g^3)$$

Ist die gleichmässig vertheilte Last pro Längeneinheit innerhalb je einer ganzen Oeffnung konstant, also $u = u'$, dann fällt in allen diesen Ausdrücken der zweite Theil weg, die Gleichungen 17, 18, 19 gehen über in die Clapeyronschen Formeln, und auch die übrigen Gleichungen des § 32. nehmen bekannte Formen an. (§ 45.)

§ 36. Combinirte Belastungen.

In einer Oeffnung l_s wirken von concentrirten Lasten P_1, P_2, $\cdots$ P_m bei a_1, a_2, $\cdots$ a_m; ausserdem ist vorhanden eine gleichmässig vertheilte Last auf die ganze Länge der Oeffnung von u pro Längeneinheit. m und u können in jeder Oeffnung verschieden sein. Nach dem in den §§ 33., 35. Gegebenen nehmen die Summenaus-

drücke in den allgemeinen Formeln des § 32. im vorliegenden Fall folgende Werthe an

$$\Sigma P\, a\,(l-a)\,(l+a) = \tfrac{1}{4}\, u l^4 + \sum_1^m P\, a\,(l-a)\,(l+a)$$

$$\Sigma P\, a\,(l-a)\,(2l-a) = \tfrac{1}{4}\, u l^4 + \sum_1^m P\, a\,(l-a)\,(2l-a)$$

$$\sum_1^l P\,(l-a) = \tfrac{1}{2}\, u l^2 + \sum_1^m P\,(l-a)$$

$$\sum_1^l P\, a \quad = \tfrac{1}{2}\, u l^2 + \sum_1^m P\, a$$

ferner wenn P_s die letzte bei a_s angreifende Kraft vor einem beliebigen Querschnitt x ist

$$\sum_1^x P\,(x-a) = \tfrac{1}{2}\, u x^2 + \sum_1^s P\,(x-a)$$

$$\sum_1^x P \quad = \quad u x \; + \sum_1^s P$$

$$\sum_1^x P\,(x-a)^2 = \tfrac{1}{3}\, u x^3 + \sum_1^s P\,(x-a)^2$$

$$\sum_1^x P\,(x-a)^3 = \tfrac{1}{4}\, u x^4 + \sum_1^s P\,(x-a)^3$$

Wären innerhalb der Oeffnung l_s verschiedene gleichmässig oder gesetzmässig vertheilte Lasten u, u' vorhanden, so hätte man anstatt der jetzt gesetzten Beiträge der vertheilten Last, die Werthe aus §§ 34., 35. zu substituiren. Wenn das Vertheilungsgesetz sich mehrmals ändert, so ist nach der Andeutung in § 34. zu verfahren, bei gesetzloser Vertheilung gelten noch die Formeln des § 32. und ist das passendste Verfahren in § 31. erwähnt worden.

§ 37. Unbelastete Stäbe. Ursache des Einflusses verschiedener Stützhöhen.

Man denke sich eine gewichtslose gerade Linie, oder einen solchen geraden Stab, dessen Eigengewicht vernachlässigt wird, über irgend eine Anzahl Stützen gelegt. Die Höhenlagen der letztern sind verschieden. Dann folgt aus den Gleichungen 17, 18, 19

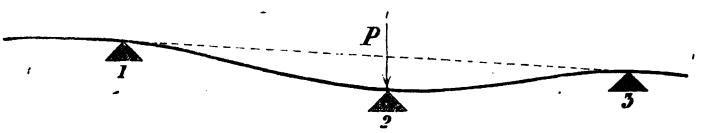
17a
$$M_{r-1}\, l_{r-1} + 2 M_r\,(l_{r-1} + l_r) + M_{r+1}\, l_r = -\left[\frac{c_{r-1} - c_r}{l_{r-1}} + \frac{c_{r+1} - c_r}{l_r}\right] 6\, E\Theta$$

18a
$$2 M_0\, l_0 + M_1\, l_0 = \left[\tau_0 - \frac{c_1 - c_0}{l_0}\right] 6\, E\Theta$$

19a $$M_n\, l_n + 2 M_{n+1}\, l_n = \left[\frac{c_{n+1} - c_n}{l_n} - \tau_{n+1}\right] 6 E \Theta$$

wonach auch alle übrigen Formeln des § 32. gelten und sich noch vereinfachen.

Fig. 25.



Es könnte nun sonderbar erscheinen, dass Momente und damit alle Arten innerer Spannungen auftreten sollen, wo gar keine äussern Kräfte vorhanden sind. Diese sind aber vorhanden, oder vielmehr, die gestellte Bedingung, dass die Stützhöhen bei gerader neutraler Achse verschieden sein sollen, ist eben nicht möglich, ohne dass gewisse Kräfte angenommen werden.

In der That, legt man selbst einen materiellen Stab von geringem Eigengewicht über eine Anzahl Stützen, so wird er nur auf denjenigen höchsten Punkten aufruhen, welche in einer Geraden liegen (diese kann auch geneigt sein) und alsdann existiren keine Momente, wie die obigen Gleichungen ausweisen.

Verlangt man aber, dass (Fig. 25) zwischen den Stützen 1 und 3 der Stab auch noch den Stützpunkt 2 berühre, welcher tiefer liegt, so ist dies — vom Einfluss der übrigen Oeffnungen abgesehen — nur dadurch zu erreichen, dass der Stab durch eine Kraft P dagegen gedrückt wird. Hierbei wirkt 1 — 3 wie eine einzige Oeffnung, es entstehen bei 1 und 3 negative Momente, bei 2 ein positives Moment und alles dies stimmt mit dem überein, was sich in § 20. in Bezug auf den Einfluss verschiedener Stützhöhen ergeben hat.

Auch bei nicht gerader neutraler Achse müssen Momente entstehen, wenn sich die Stützpunkte, deren Berührung vorausgesetzt wird, dieser Achse nicht von selbst anschliessen; denn alsdann sind Kräfte nöthig, die Berührung zu erzwingen.

Dasselbe gilt für einfache Träger mit eingespannten Enden, wo bei den Einspannungsstellen eine stetige Reihe von Stützpunkten aufeinander folgt, und überhaupt in allen Fällen, welche zur Auflagerung oder Einspannung eine Deformation der ursprünglichen neutralen Achse, d. h. eine Biegung voraussetzen.

Werden also die Stützpunkte deshalb ungleich hoch gelegt, um genannte Momente zu erzeugen oder Momente entgegengesetzten Sinnes zu verringern, so darf auch die neutrale Achse nicht von vornherein nach den Stützpunkten geformt werden. (Vergl. § 50., 59.)

§ 38. Einfache Träger.

Es wurde schon mehrfach darauf hingewiesen, dass alle Arten einfacher Träger als spezielle Fälle des continuirlichen Trägers zu betrachten sind. Alle bis jetzt abgeleiteten Formeln und Gesetze bleiben in vollem Maasse gültig, soweit sie nicht, z. B. wegen des Mangels negativer Momente bei freier Auflagerung oder in Folge der verschwindenden Aussenöffnungen, gegenstandslos werden.

Von diesem Gesichtspunkte aus beschränkt sich der Inhalt der folgenden Kapitel auf Wiederholung und stellenweise Reduction bereits gegebener Formeln. Die allgemeinen und charakteristischen Typen der Gleichungen behalten wir soviel als möglich bei.

Die Veränderlichkeit des Querschnitts hat direkten Einfluss nur auf die Bestimmung der Stützenmomente, der Gleichung der elastigen Linie und der Einsenkung. Da indessen alles hierher Gehörige in den §§ 13., 14. ganz allgemein gesagt worden ist, so geben wir die spezielleren Formeln nur noch für konstanten Querschnitt.

Bei allen einfachen Trägern soll der Ursprung der Coordinaten mit einem der Stützpunkte zusammenfallen, sodass für $x = 0\ y = 0$ wird.

Als Ausgangspunkt zur Bestimmung der Stützenmomente, dienen die Formeln

$$18 \quad 2Ml + M'l = \left[\tau - \frac{c'}{l}\right] 6E\Theta - \frac{1}{l}\sum^{i} P\,a\,(l-a)\,(2l-a)$$

$$19 \quad Ml + 2M'l = \left[\frac{c'}{l} - \tau'\right] 6E\Theta - \frac{1}{l}\sum^{i} P\,a\,(l-a)\,(l+a)$$

(Bei sprungweise veränderlichem Querschnitt hätte man von den Gleichungen 51, 52 auszugehen.) Sind M, M' gleich 0 oder sonst bekannt, so gelten diese Gleichungen doch noch und es könnten daraus die dann unbekannten τ, τ' ermittelt werden.

An Einspannungsstellen ist bei Einsetzen der Werthe τ, τ' auf das Vorzeichen zu achten. Ein Irrthum ist nicht möglich, wenn man bedenkt, dass $\tau = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0}$ und $\tau' = \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=l}$, dass ferner x immer in der gleichen Richtung wächst, also dx stets und y dann positiv ist, wenn für das positive dx y nach unten wächst.

Bei einfachen Trägern mit eingespannten Enden und daher mit negativen Momenten, gelten die allgemeinen Formeln für Inflexionspunkte, Grenzpunkte der Beitragsstrecken, Influenzpunkte, wie für continuirliche Träger (Vergl. § 47., Beisp. 3—5). Doch lassen sich diese Punkte auch in jedem gegebenen Fall direkt bestimmen.

Alles in § 16. über Gültigkeit und Modification der Hauptformeln Gesagte, ist hier zu wiederholen.

§ 39. Einfache Träger. Beide Enden eingespannt.

Der ursprünglich gerade Träger ist unter Winkeln eingespannt, deren Tangenten τ, τ'. Differenz der Stützhöhen c'.

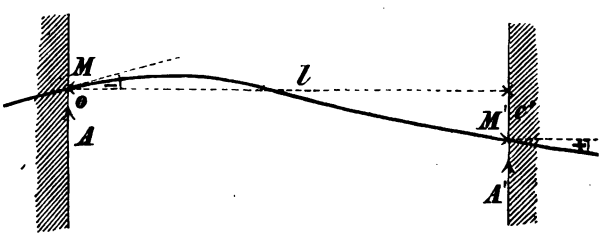
Beliebige Belastung. Aus den in § 38. angeschriebenen beiden Gleichungen 18, 19 erhält man auf gewöhnlichem Wege die Unbekannten M, M'

104 $$M = \left(2\tau + \tau' - 3\,\frac{c'}{l}\right)\frac{2E\Theta}{l} - \frac{1}{l^2}\overset{l}{\Sigma} P\,a\,(l-a)^2$$

105 $$M' = \left(3\,\frac{c'}{l} - \tau - 2\tau'\right)\frac{2E\Theta}{l} - \frac{1}{l^2}\overset{l}{\Sigma} P\,a^2\,(l-a)$$

Nachdem so die Stützenmomente bekannt, hat man wie bisher: vertikale Schubkräfte unmittelbar bei den Stützen, Stützenreaktionen

Fig. 26.



20 $$V_0 = -A = \frac{1}{l}\left[M - M' - \Sigma P\,(l-a)\right]$$

21 $$V_l = A' = \frac{1}{l}\left[M - M' + \overset{l}{\Sigma} P\,a\right]$$

Moment und vertikale Schubkraft in einem beliebigen Querschnitt x

10 $$M_x = M + A_x - \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)$$

7 $$V_x = \overset{x}{\Sigma} P - A$$

Maximalmomentenpunkt $x = \mu$ bei

25 $$\overset{x}{\Sigma} P = A \text{ oder } V_x = 0$$

positives Maximalmoment

27 $$M_\mu = M + A_\mu - \overset{\mu}{\Sigma} P\,(\mu-a)$$

spezifische horizontale Schubkraft in Querschnitt x, in Entfernung η von der neutralen Achse, für die ganze Breite

28 $$H_\eta = -\frac{V_x}{\Theta}\overset{a}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}\eta$$

Genaueres hierüber und über die schiefen Spannungen in den §§ 9—11. Gleichung der elastigen Linie

14α $$y = \tau x - \frac{1}{6E\Theta}\left[3Mx^2 + Ax^3 - \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^3\right]$$

Ort der grössten Einsenkung.

44α $\mathfrak{e}$ aus $$o = \tau - \frac{c'}{l} - \frac{1}{2E\Theta}\left[2M\mathfrak{e} + A\mathfrak{e}^2 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P\,(\mathfrak{e}-a)^2\right]$$

Werth der grössten Einsenkung

45α $$\mathfrak{E} = \left(\tau - \frac{c'}{l}\right)\mathfrak{e} - \frac{1}{6E\Theta}\left[3M\mathfrak{e}^2 + A\mathfrak{e}^3 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P\,(\mathfrak{e} - a)^3\right]$$

Es liegt im Gefühl, wenn der Träger zur Mitte symmetrisch belastet und auch $\tau = \tau' = \frac{c'}{l}$ ist, dass dann auch der Punkt $\mathfrak{e}$ der grössten Einsenkung mit $\frac{l}{2}$ zusammenfällt; wir wollen es aber beweisen. Es ist

$$A = A' \text{ also } \mu = \frac{l}{2}$$

$$M = -\frac{1}{l^2}\overset{l}{\Sigma} P\,a\,(l-a)^2$$

Da aber für zwei symmetrisch zu μ liegende gleiche Kräfte P, P' wegen $a' = l - a$

$$a\,(l-a)^2 + a'\,(l-a')^2 = al\,(l-a)$$

so folgt

$$M = -\frac{1}{l}\overset{\mu}{\Sigma} P\,(l-a)$$

und substituirt man diesen Werth, sowie $A = \overset{\mu}{\Sigma} P$ in

$$\tau - \frac{c'}{l} - \frac{1}{2E\Theta}\left[2M\mu + A\mu^2 - \overset{\mu}{\Sigma} P\,(\mu - a)^2\right]$$

so wird dieser Ausdruck gleich Null, d. h. die Bedingung für $\mathfrak{e}$ ist durch $\mu = \frac{l}{2}$ erfüllt

$$\mu = \frac{l}{2} = \mathfrak{e}$$

Es ergiebt sich durch Einsetzen in $\mathfrak{E}$

106 $$\mathfrak{E} = \frac{1}{24E\Theta}\overset{\frac{l}{2}}{\Sigma} P\,a^2\,(3l - 4a)$$

Liegt bei $\frac{l}{2}$ eine concentrirte Last, so ist der Entstehung dieses Summenausdrucks gemäss, nur die Hälfte derselben einzusetzen. Es braucht nicht erwähnt zu werden, dass diese Formel auch noch gültig ist, wenn die P ∞ klein werden und die a stetig auf einander folgen.

Ist $\tau = -\tau'$ und $c' = 0$, so erhält man auf ganz analogem Wege

107 $$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{4}\tau l + \frac{1}{24E\Theta}\overset{\frac{l}{2}}{\Sigma} P\,a^2\,(3l - 4a)$$

und der Punkt $x = \frac{l}{2}$ vereinigt dann folgende Eigenschaften in sich

y ein Maximum

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$\frac{d^2y}{dx^2}$ ein Maximum

$\frac{d^3y}{dx^3} = 0$.

womit verbunden $\mathfrak{E}$ und M_x Maxima, ϱ Minimum, $V_x = 0$.

Ueber Influenzpunkte und Inflexionspunkte siehe in § 47., Beisp. 3.

Concentrirte Lasten allein. Bis zum beliebigen Querschnitt x wirken in Entfernung $a_1, a_2, \cdots a_z$ von der linken Stütze die concentrirten Lasten $P_1, P_2, \cdots P_z$; von o bis l greifen $P_1, P_2, \cdots P_m$ bei $a_1, a_2, \cdots a_m$ an.

In den für beliebige Belastung gegebenen Formeln ist zu substituiren

$$\overset{i}{\Sigma} P\, a\, (l-a)^2 = \overset{m}{\underset{1}{\Sigma}} P\, a\, (l-a)^2$$

$$\overset{i}{\Sigma} P\, a^2\, (l-a) = \overset{m}{\underset{1}{\Sigma}} P\, a^2\, (l-a)$$

der Werth aller übrigen Summenausdrücke nach § 33.

Gesetzmässig vertheilte Lasten allein. Es sei die vertheilte Last pro Längeneinheit

von $a = o$ bis $a = g$ $\qquad u = \mathfrak{f}(a)$

von $a = g$ bis $a = l$ $\qquad u' = \varphi(a)$

In den obigen Formeln sind zu substituiren

$$\overset{i}{\Sigma} P\, a\, (l-a)^2 = \int_0^g a\, (l-a)^2\, \mathfrak{f}(a)\, da + \int_g^i a\, (l-a)^2\, \varphi(a)\, da$$

$$\overset{i}{\Sigma} P\, a^2\, (l-a) = \int_0^g a^2\, (l-a)\, \mathfrak{f}(a)\, da + \int_g^i a^2\, (l-a)\, \varphi(a)\, da$$

Der Werth aller übrigen Summenausdrücke nach § 34., wo auch angegeben, wie zu verfahren, wenn sich das Vertheilungsgesetz innerhalb der Oeffnung beliebig oft ändert.

Gleichmässig vertheilte Lasten allein. Spezieller Fall des vorigen. Gleichmässig vertheilte Last pro Längeneinheit

u von $a = o$ bis $a = g$

u' von $a = g$ bis $a = l$

Die Ausführung der Integrale ergibt

$$\overset{i}{\Sigma} P\, a\, (l-a)^2 = \tfrac{1}{12}\, ul^4 + \tfrac{1}{12}\, g^2\, (u'-u)\, (6l^2 - 8gl + 3g^2)$$

$$\overset{i}{\Sigma} P\, a^2\, (l-a) = \tfrac{1}{12}\, ul^4 + \tfrac{1}{12}\, g^3\, (u-u')\, (4l - 3g)$$

Die Werthe der übrigen Summenausdrücke in den obigen Formeln für beliebige Belastung sind aus § 35. zu entnehmen.

Combinirte Belastung. Es seien vorhanden concentrirte Lasten

von o bis x $P_1, P_2, \cdots P_s$ bei $a_1, a_2, \cdots a_s$
von o bis l $P_1, P_2, \cdots P_m$ bei $a_1, a_2, \cdots a_m$

und ausserdem eine gleichmässig vertheilte Last auf der ganzen Länge von u pro Längeneinheit.

$$\sum_1^l P\,a\,(l-a)^2 = \tfrac{1}{12}\,ul^2 + \sum_1^m P\,a\,(l-a)^2$$

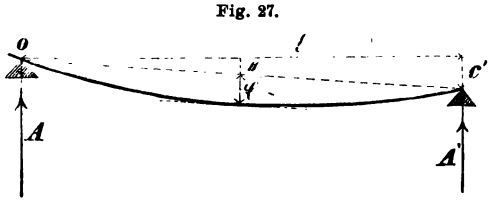
$$\sum_1^l P\,a^2\,(l-a) = \tfrac{1}{12}\,ul^2 + \sum_1^m P\,a^2\,(l-a)$$

Uebrige Summenausdrücke aus § 36., wo auch das Nähere für complicirtere Fälle angegeben ist. Gewöhnlicher Fall $u = p$ gleich Eigengewicht pro Längeneinheit.

§ 40. Einfache Träger. Beide Enden frei aufliegend.

Beliebige Belastung. Es ist $M = 0$, $M' = 0$; daher aus den Formeln des § 39. oder 32.:
Vertikale Schubkräfte direkt bei den Stützen, Stützenreaktionen

Fig. 27.



20β $$V_0 = -A = -\frac{1}{l}\sum_1^l P\,(l-a)$$

21β $$V_l = A' = \frac{1}{l}\sum_1^l P\,a$$

Moment und vertikale Schubkraft im beliebigen Querschnitt x

10β $$M_x = Ax - \sum_1^x P\,(x-a)$$

7 $$V_x = \sum_1^x P - A$$

Maximalmomentenpunkt $x = \mu$ bei

25 $$V_x = o \text{ oder } A = \sum_1^x P$$

Maximalmoment

27β $$M_\mu = A\mu - \sum_1^\mu P\,(\mu-a)^2$$

spezifische horizontale Schubkraft im Querschnitt x, in Entfernung η von der neutralen Schicht, für die ganze Breite

28 $$H_\eta = -\frac{V_x}{\Theta}\sum_\eta^a \mathfrak{F}\eta$$

Näheres hierüber und über schiefe Spannung in den §§ 9.—11.

Gleichung der elastigen Linie

14_β $$y = \tau x - \frac{1}{6 E \Theta}\left[A x^3 - \overset{x}{\Sigma} P (x-a)^3\right]$$

Ort der grössten Einsenkung

44_β $\mathfrak{e}$ aus $$\tau - \frac{c'}{l} - \frac{1}{2 E \Theta}\left[A \mathfrak{e}^2 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P (\mathfrak{e}-a)^2\right] = 0$$

Werth der grössten Einsenkung

45_β $$\mathfrak{E} = \left(\tau - \frac{c'}{l}\right)\mathfrak{e} - \frac{1}{6 E \Theta}\left[A \mathfrak{e}^2 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P (\mathfrak{e}-a)^3\right]$$

In diesen Gleichungen ist nach 15

15_β $$\tau = \frac{c'}{l} + \frac{1}{6 E \Theta l} \overset{l}{\Sigma} P a (l-a)(2l-a)$$

Ist der Träger zu seiner Mitte symmetrisch belastet, dann hat man

$$A = A' \quad \mu = \frac{l}{2}$$

Für 2 zur Mitte symmetrisch liegende gleiche Kräfte P, P' ist wegen $a' = l - a$

$$P a (l-a)(2l-a) + P' a' (l-a')(2l-a') = 3 l P a (l-a)$$

und es folgt daraus

$$\tau = \frac{c'}{l} + \frac{1}{2 E \Theta} \overset{\mu}{\Sigma} P a (l-a)$$

Weil nun auch $A = \overset{\mu}{\Sigma} P$ so lautet die Bedingung für $\mathfrak{e}$ nach 44_β

$$\frac{1}{2 E \Theta} \overset{\mu}{\Sigma} P a (l-a) - \frac{1}{2 E \Theta} \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P a (2\mathfrak{e} - a) = 0$$

und die Bedingung ist erfüllt für $\mathfrak{e} = \mu = \frac{l}{2}$. Alsdann erhält man für $\mathfrak{E}$ nach Substitution dieser Werthe $\mathfrak{e}$, τ, A

108 $$\mathfrak{E} = \frac{1}{24 E \Theta} \overset{\frac{l}{2}}{\Sigma} P a (3 l^2 - 4 a^2)$$

Die Formel gilt auch noch, wenn die P alle oder zum Theil Lastelemente sind und die a stetig aufeinander folgen. Liegt unter $\frac{l}{2}$ eine concentrirte Last, so ist der Entstehung dieses Summenausdrucks gemäss, nur die Hälfte derselben einzusetzen.

Weil keine negativen Momente vorhanden, so existiren keine Inflexionspunkte, Influenzpunkte und Grenzpunkte der Beitragsstrecken; man kann sie sich mit den Stützpunkten zusammenfallend denken.

Spezielle Belastungsarten. Die Werthe der Summenausdrücke sind zu entnehmen

a) für concentrirte Lasten allein aus § 33.
b) für gesetzmässig vertheilte Lasten allein aus § 34.
c) für gleichmässig vertheilte Lasten allein aus § 35.
d) für combinirte Belastungen aus § 36.

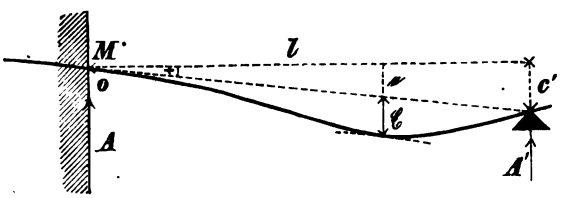
§ 41. Einfache Träger. Ein Ende eingespannt, das andre frei aufliegend.

Beliebige Belastung. $M' = 0$. Aus § 32. Gleichung 18

109 $$M = \left[\tau - \frac{c'}{l}\right]\frac{3\,E\,\Theta}{l} - \frac{1}{2\,l^2}\overset{l}{\Sigma}\,P\,a\,(l-a)\,(2\,l-a)$$

und nun nach den Gleichungen des § 39. oder 32.
vertikale Schubkräfte unmittelbar bei den Stützen, Stützenreaktionen

Fig. 28.



20_γ $$V_0 = -A = \frac{1}{l}\left[M - \overset{l}{\Sigma}\,P\,(l-a)\right]$$

21_γ $$V_l = A' = \frac{1}{l}\left[M + \overset{l}{\Sigma}\,P\,a\right]$$

Moment und vertikale Schubkraft im beliebigen Querschnitt x

10 $$M_x = M + A\,x - \overset{x}{\Sigma}\,P\,(x-a)$$

7 $$V_x = \overset{x}{\Sigma}\,P - A$$

Maximalmomentenpunkt $x = \mu$ aus

25 $$V_x = 0 \text{ oder } A = \overset{x}{\Sigma}\,P$$

Maximalmoment (positives)

27 $$M_\mu = M - A\,\mu + \overset{\mu}{\Sigma}\,P\,(\mu - a)$$

spezifische horizontale Schubkraft im Querschnitt x, in Entfernung η von der neutralen Schicht, für die ganze Breite

28 $$H_\eta = -\frac{V_x}{\Theta}\overset{a}{\underset{\eta}{\Sigma}}\mathfrak{F}\,\eta$$

Ausführlicheres hierüber und über die schiefen Spannungen in §§ 9—11. Gleichung der elastigen Linie

14_α $$y = \tau\,x - \frac{1}{6\,E\,\Theta}\left[3\,M\,x^2 + A\,x^3 - \overset{x}{\Sigma}\,P\,(x-a)^3\right]$$

Ort der grössten Einsenkung

44_a $\mathfrak{e}$ aus $0 = \tau - \frac{c'}{l} - \frac{1}{2\,E\Theta}\left[2\,M\,\mathfrak{e} + A\,\mathfrak{e}^2 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma}\,P\,(\mathfrak{e}-a)^2\right]$

Werth der grössten Einsenkung

45_a $\mathfrak{E} = \left[\tau - \frac{c'}{l}\right]\mathfrak{e} - \frac{1}{6\,E\Theta}\left[3\,M\,\mathfrak{e}^2 + A\,\mathfrak{e}^3 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma}\,P\,(\mathfrak{e}-a)^3\right]$

Betreffs der Influenzpunkte und Inflexionspunkte § 47. Beisp. 4.

Spezielle Belastungsarten. Die Werthe der Summenausdrücke in vorstehenden Formeln sind zu entnehmen

a) für concentrirte Lasten allein aus § 33.;
b) für gesetzmässig vertheilte Lasten allein aus § 34.;
c) für gleichmässig vertheilte Lasten allein aus § 35.;
d) für combinirte Belastungen aus § 36.

§ 42. Einfache Träger. Ein Ende eingespannt, das andre frei schwebend.

Beliebige Belastung. $M' = 0$, $A' = 0$. Da die 2 Gleichungen 18, 19 in § 38. jetzt 3 Unbekannte M, τ' und c' enthalten, so genügen dieselben nicht; dagegen folgt aus

21_δ $$A' = 0 = V_l = \frac{1}{l}\left[M - M' + \overset{l}{\Sigma}\,P\,a\right]$$

110 $$M = -\overset{l}{\Sigma}\,P\,a$$

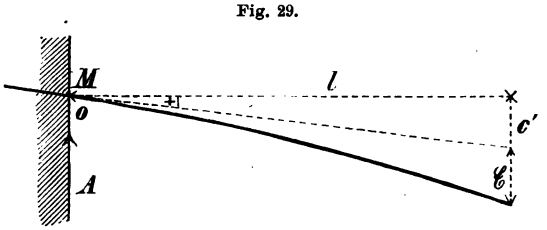
und durch Substitution in

20 $$V_0 = -A = \frac{1}{l}\left[M - M' - \overset{l}{\Sigma}\,P\,(l-a)\right]$$

20_δ $$V_0 = -A = -\overset{l}{\Sigma}\,P$$

Moment und vertikale Schubkraft in einem beliebigen Querschnitt x

Fig. 29.



10 $$M = M + A\,x - \overset{x}{\Sigma}\,P\,(x-a)$$

7 $$V_x = \overset{x}{\Sigma}\,P - A$$

oder nach Substitution der Werthe A und M in bekannteren Formen

10_δ $$M_x = \sum_x^l P\,(x - a)$$

7_δ $$V_x = -\sum_x^l P$$

Maximalmomentenpunkt der positiven Momente $x = \mu$ bei

25_δ $$V_x = 0 \text{ d. h. } \mu = l$$

positives Maximalmoment durch Substitution von M und A

27_δ $$M_\mu = M + A\,l - \sum^l P\,(l - a) = 0$$

Dies stimmt vollständig mit unsrer Bezeichnung überein; denn weil das Krümmungscentrum überall unterhalb der Abscissenachse liegt, wie bei den Pfeilern continuirlicher Träger, so existiren keine positiven Momente. Die vertikale Schubkraft ist überall negativ. Dagegen hat $x = l$ den Charakter eines Wendepunktes; es ist daselbst $M_x = 0$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$, $\varrho = \infty$.

Spezifische horizontale Schubkraft bei x, in Entfernung η von der neutralen Schicht — Näheres in §§. 9.—11. —

28 $$H_\eta = -\frac{V_x}{\Theta}\sum_\eta^a \mathfrak{F}\,\eta$$

Gleichung der elastigen Linie

14_α $$y = \tau\,x - \frac{1}{6\,E\,\Theta}\left[3\,M\,x^2 + A\,x^3 - \sum^x P\,(x - a)^3\right]$$

Ganzer Pfeil c'; für $x = l$ $y = c'$

$$c' = \tau\,l + \frac{1}{6\,E\,\Theta}\sum^l P\,a^2\,(3\,l - a)$$

und also grösste Einsenkung bei $\mathfrak{e} = l$

111 $$\mathfrak{E} = \frac{1}{6\,E\,\Theta}\sum^l P\,a^2\,(3\,l - a)$$

Für alle Querschnitte spielt $x = l$ die Rolle des Influenzpunktes.

Spezielle Belastungsarten. Die Werthe der Summenausdrücke sind zu entnehmen

a) für concentrirte Lasten allein aus § 33.;
b) für gesetzmässig vertheilte Lasten allein aus § 34.;
c) für gleichmässig vertheilte Lasten allein aus § 35.;
d) für combinirte Belastungen aus § 36.

§ 43. Einfache Träger. Unterstützung in 2 beliebigen Punkten.

Zählt man bei den überragenden Enden die Abscissen von den Stützpunkten aus, so muss fürs Gleichgewicht sein

112
$$\begin{cases} M = -\overset{l_0}{\Sigma} P a \\ M' = -\overset{l_1}{\Sigma} P a \end{cases}$$

Mit diesen Werthen an Stelle von 104, 105 gelten innerhalb l die Formeln des § 39., in l_0 und l_1 die Gleichungen des § 42. Nur für die Stützenreaktionen hat man selbstverständlich

$$T = A_0 + A,\ T' = A' + A_1$$

Die Tangenten der Neigungswinkel über den Stützen sind durch 15, 16 bestimmt.

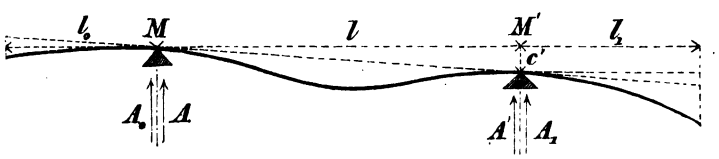
Die Formeln gelten auch noch, wenn l ∞ klein wird. Alsdann muss fürs Gleichgewicht $M = M'$ d. h.

$$\overset{l_0}{\Sigma} P a = \overset{l_1}{\Sigma} P a$$

sein.

Wenn der Träger bei o eingespannt ist, während er über die freie Auflagerung bei l um l_1 hinwegragt, so gelten ebenfalls inner-

Fig. 30.



halb l die Formeln des § 39., in l_1 diejenigen des § 42., mit dem Unterschied jedoch, dass $M' = \overset{l_1}{\Sigma} P a$ einzusetzen und $T' = A' + A_1$ wäre. τ' könnte durch 16 bestimmt werden.

Ständen bei einem continuirlichen Träger die Enden über die freien Auflagerungen hinaus, so hätte man auch dort in den allgemeinen Gleichungen statt $M_0 = 0$, $M_{n+1} = 0$ die angegebenen Werthe einzuführen.

Ist der Träger in Form und Belastung symmetrisch, also $\tau = -\tau'$, $c' = 0$ so muss auch hier wie in § 39. sein

$$\mathfrak{e} = \mu = \frac{l}{2}$$

107
$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{4}\tau l + \frac{1}{24 E \Theta} \overset{\frac{l}{2}}{\Sigma} P a^2 (3 l - 4 a)$$

Wegen

$$M = M' = -\overset{l_0}{\Sigma} P a,\ c' = 0 \text{ und } \overset{l}{\Sigma} P a (l - a)(2 l - a) = 3 l \overset{\frac{l}{2}}{\Sigma} P a (l - a)$$

folgt aus 15

$$\tau = \frac{1}{2 E \Theta} \left[\overset{\frac{l}{2}}{\Sigma} P a (l - a) - l \overset{l_0}{\Sigma} P a \right]$$

und durch Substitution dieses Werthes in 107

113 $$\mathfrak{E} = \frac{1}{24 E \Theta}\left[\sum^{\frac{l}{2}} P a\,(3 l^2 - 4 a^2) - 3 l^2 \sum^{l_0} P a\right]$$

Wenn $l_0 = 0$ geht diese Gleichung, wie selbstverständlich, über in die für frei aufgelegte Enden geltende Formel 108. Ist dagegen $\tau = 0$, dann folgt aus unsrer Gleichung nach 107 die für Träger mit eingespannten Enden gültige 106. Die Bedingung $\tau = 0$ ist erfüllt, wenn

$$\sum^{\frac{l}{2}} P a\,(l - a) = l \sum^{l_0} P a$$

Unter dieser Voraussetzung und bei vollständiger Symmetrie liegen also die Tangenten über den Stützen horizontal und die elastige Linie in l stimmt genau mit derjenigen eines Trägers überein, dessen beide Enden ohne Deformation seiner ursprünglichen Achse (§ 37.) horizontal eingespannt sind, und der innerhalb l wie der Träger mit überragenden Enden belastet ist.

Wäre z. B. der ganze Träger durch dieselbe gleichmässig vertheilte Last q angegriffen, so würde aus

$$l \int_0^{l_0} a\ q\ da = \int_0^{\frac{l}{2}} a\,(l - a)\,q\,da$$

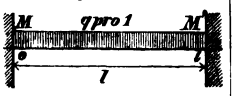
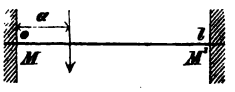
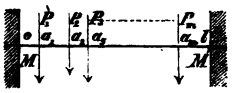
die Bedingung folgen

$$l_0 = 0{,}408\ l.$$

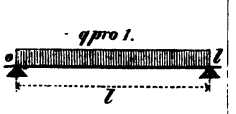
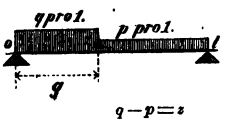
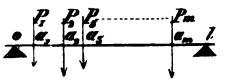
§ 44. Einfache Träger. Formeltafeln.

In den folgenden Tabellen sind die bei einfachen Trägern am meisten vorkommenden, einfachsten Fälle enthalten, wie sie aus den gegebenen allgemeinen Formeln folgen. Da die Ausdrücke für die spezifischen Schubkräfte und Spannungen immer dieselben bleiben und bestimmt sind, sobald die vertikale Schubkraft bekannt ist, so geben wir in den Tabellen nur die Formeln für die letztere und verweisen im Uebrigen auf die §§ 9.—11.

a) Gerade Träger mit horizontal eingespannten Enden.

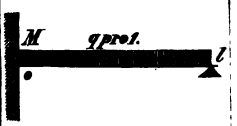
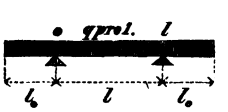
Belastung des Trägers.			
Moment bei $x = o$	$M = -\frac{1}{12} q l^2$	$M = \frac{1}{l^2} P a (l-a)^2$	$M = -\frac{1}{l^2} \overset{l}{\Sigma} P a (l-a)^2$
Moment bei $x = l$	$M' = -\frac{1}{12} q l^2$	$M' = -\frac{1}{l^2} P a^2 (l-a)$	$M' = -\frac{1}{l^2} \overset{l}{\Sigma} P a^2 (l-a)$
Stützenreaktion bei o	$A = -V_0 = \frac{1}{2} q l$	$A = -V_0 = \frac{1}{l} P (l-a)$	$A = -V_0 = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P (l-a)$
Stützenreaktion bei l	$A' = V_l = \frac{1}{2} q l$	$A' = V_l = \frac{1}{l} P a$	$A' = V_l = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P a$
Moment im beliebigen Querschnitt x	$M_x = -\frac{1}{12} q l^2 + \frac{1}{2} q x (l-x)$	vor P, $M_x = M + Ax$ nach P, $M_x = M + Ax - P(x-a)$	$M_x = M + Ax - \overset{x}{\Sigma} P (x-a)$
Vert. Schubkraft im bel. Querschnitt x	$V_x = q\,(x - \frac{1}{2} l)$	vor P, $V_x = -A$ nach P, $V_x = A'$	$V_x = \overset{x}{\Sigma} P - A$
Ort des positiven Maximalmoments	$\mu = \frac{l}{2}$	$\mu = a$	$x = \mu$ bei $\overset{x}{\Sigma} P = A$
Positives Maximalmoment	$M_\mu = \frac{1}{24} q l^2$	$M_\mu = \frac{1}{l^2} P a^2 (l-a)$	$M_\mu = M + A_\mu - \overset{\mu}{\Sigma} P (\mu - a)$
Gleichung der elastigen Linie	$y = \frac{1}{24 E \Theta} q x^2 (l-x)^2$	vor P, $y = -\frac{x^2}{6 E \Theta}(3M + Ax)$ nach P, $y = -\frac{1}{6 E \Theta}\left[3 M x^2 + A x^3 - P (x-a)^3\right]$	$y = -\frac{1}{6 E \Theta}\left[3 M x^2 + A x^3 - \overset{x}{\Sigma} P (x-a)^3\right]$
Ort der grössten Einsenkung	$\mathfrak{e} = \frac{l}{2}$	für $a < \frac{l}{2}$, $\mathfrak{e} = \frac{(l-a)^2 + a^2}{l}$ für $a = \frac{l}{2}$, $\mathfrak{e} = \frac{l}{2}$ für $a > \frac{l}{2}$, $\mathfrak{e} = \frac{2a(l-a)}{l}$	$\mathfrak{e}$ aus $\left[2 M \mathfrak{e} + A \mathfrak{e}^2 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P (\mathfrak{e} - a)^2\right] = 0$, bei symmetrischer Belastung $\mathfrak{e} = \frac{l}{2}$
Werth der grössten Einsenkung	$\mathfrak{E} = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{E \Theta}$	für $a < \frac{l}{2}$, $\mathfrak{E} = \frac{2 P a^4 (l-a)^3}{3 l^3 E \Theta}$ für $a = \frac{l}{2}$, $\mathfrak{E} = \frac{1}{192} \frac{P l^3}{E \Theta}$ für $a > \frac{l}{2}$, $\mathfrak{E} = \frac{2 P a^3 (l-a)^3}{3 l^3 E \Theta}$	$\mathfrak{E} = -\frac{1}{6 E \Theta}\left[3 M \mathfrak{e}^2 + A \mathfrak{e}^3 - \overset{\mathfrak{e}}{\Sigma} P (\mathfrak{e} - a)^3\right]$, b. sym. Bel. $\mathfrak{E} = \frac{1}{24 E \Theta} \overset{\frac{l}{2}}{\Sigma} P a^2 (3l - 4a)$

b) Gerade Träger mit frei aufliegenden Enden.

Belastung des Trägers.			
Stützenreaktion bei o	$A = -V_0 = \frac{1}{2} q l$	$A = -V_0 = \frac{1}{2} p l + \frac{g}{2l} z (2l - g)$	$A = -V_0 = \frac{1}{l} \sum^{l} P (l - a)$
Stützenreaktion bei l	$A' = V_l = \frac{1}{2} q l$	$A' = V_l = \frac{1}{2} p l + \frac{g^2}{2l} z$	$A' = V_l = \frac{1}{l} \sum^{l} P a$
Moment im beliebigen Querschnitt x	$M_x = \frac{1}{2} q x (l - x)$	für $x \leq g$ $M_x = Ax - \frac{1}{2} q x^2$ für $x \geq g$ $M_x = Ax - \frac{1}{2} p x^2 - \frac{1}{2} z g (2x - g)$	$M_x = A x - \sum^{x} P (x - a)$
Vert. Schubkraft im bel. Querschnitt x	$V_x = q (x - \frac{1}{2} l)$	für $x < g$ $V_x = qx - A$ für $x > g$ $V_x = px + zg - A$	$V_x = \sum^{x} P - A$
Maximalmomentenpunkt	$\mu = \frac{l}{2}$	$x = \mu$ bei $V_x = 0$	$x = \mu$ bei $\sum^{x} P = A$
Maximalmoment	$M_\mu = \frac{1}{8} q l^2$	für $\mu \leq g$ $M_\mu = A\mu - \frac{1}{2} q \mu^2$ für $\mu \geq g$ $M_\mu = A\mu - \frac{1}{2} p \mu^2 - \frac{1}{2} z g (2\mu - g)$	$M_\mu = A \mu - \sum^{\mu} P (\mu - a)$
Gleichung der elastigen Linie	$y = \frac{qx}{24 E \Theta} (l^3 - 2x^2 l + x^3)$	§ 40.	*) $y = \tau x - \frac{1}{6 E \Theta} \left[A x^3 - \sum^{x} P (x - a)^3 \right]$
Ort der grössten Einsenkung	$\mathfrak{e} = \frac{l}{2}$	§ 40.	*) $\mathfrak{e}$ aus $\tau - \frac{1}{2 E \Theta} \left[A \mathfrak{e}^2 - \sum^{\mathfrak{e}} P (\mathfrak{e} - a)^2 \right] = 0$ bei symmetrischer Belastung $\mathfrak{e} = \frac{l}{2}$
Werth der grössten Einsenkung	$\mathfrak{E} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{E \Theta}$	§ 40.	*) $\mathfrak{E} = \tau \mathfrak{e} - \frac{1}{6 E \Theta} \left[A \mathfrak{e}^3 - \sum^{\mathfrak{e}} P (\mathfrak{e} - a)^3 \right]$ bei symmetrischer Belastung $\mathfrak{E} = \frac{1}{24 E \Theta} \sum^{\frac{l}{2}} P a (3l^2 - 4a^2)$

*) In diesen Gleichungen ist $\tau = \frac{1}{6 E \Theta l} \sum^{l} P a (l - a) (2l - a)$

c) Verschiedene gleichmässig belastete Träger.

Darstellung der Träger.			
Moment bei $x = o$	$M = -\frac{1}{8} q l^2$	$M = -\frac{1}{2} q l^2$	$M = -\frac{1}{2} q l_0^2$
Moment bei $x = l$	$M' = 0$	$M' = 0$	$M' = -\frac{1}{2} q l_0^2$
Auflagerreaktion bei o	$A = -V_0 = \frac{5}{8} q l$	$A = -V_0 = q l$	$T = q (l_0 + \frac{1}{2} l)$
Auflagerreaktion bei l	$A' = V_l = \frac{3}{8} q l$	$A' = V_l = 0$	$T' = q (l_0 + \frac{1}{2} l)$
Moment im belieb. Querschnitt x	$M_x = \frac{1}{8} q (5 l x - 4 x^2 - l^2)$	$M_x = -\frac{1}{2} q (l - x)^2$	$M_x = \frac{1}{2} q \left(x l - x^2 - l_0^2\right)$
Vert. Schubkraft im bel. Querschnitt x	$V_x = q (x - \frac{5}{8} l)$	$V_x = -q (l - x)$	$V_x = q (x - \frac{1}{2} l)$
Ort des positiven Maximalmoments	$\mu = \frac{5}{8} l$	$\mu = l$	$\mu = \frac{l}{2}$
Positives Maximalmoment	$M_\mu = \frac{9}{128} q l^2$	$M_\mu = 0$	$M_\mu = \frac{1}{8} q \left(l^2 - 4 l_0^2\right)$
Gleichung der elastigen Linie	$y = \frac{q x^2}{48 E \Theta} (l - x)(3l - 2x)$	$y = \frac{q x^2}{24 E \Theta} (6 l^2 - 4 l x + x^2)$	$y = \frac{q x}{24 E \Theta} \left[l^3 - 6 l_0 (l - x) - x^2 (2 l - x) \right]$
Ort der grössten Einsenkung	$e = 0{,}578\, l$	$e = l$	$e = \frac{l}{2}$
Werth der grössten Einsenkung	$\mathfrak{E} = 0{,}0054 \frac{q l^2}{E \Theta}$	$\mathfrak{E} = \frac{1}{8} \frac{q l^4}{E \Theta}$	$\mathfrak{E} = \frac{q l^2}{384 E \Theta} \left(5 l^2 - 24 l_0^2\right)$

§ 45. Gewöhnlichster Fall bei continuirlichen Trägern. Die Parabel als Momentencurve.

Bei praktischen Berechnungen wird sehr häufig nur mit gleichmässig vertheilten Lasten auf die ganze Länge der einzeln Oeffnungen gerechnet. Es genügt dies auch meistens, um zu bestimmen

1) die grössten Werthe der negativen Momente über allen Stützen;

2) die grössten Werthe der positiven Maximalmomente (M_μ) in allen Oeffnungen;

3) die grössten vorkommenden vertikalen Schubkräfte, unmittelbar an den Stützen;

4) die Maximalwerthe der Reaktionen aller Stützen.

Ebenso können die Minima aller dieser Grössen gefunden werden. Wir stellen deshalb hier noch speziell diejenigen Formeln zusammen, welche in solchem Fall zur Verwendung kommen. Dieselben finden sich aus den allgemeinen Formeln des § 32. mit den Summenausdrücken in § 35., wenn bei den letztern noch $u = u'$ gesetzt wird.

Es sei allgemein u_s die gleichmässig vertheilte Last pro Längeneinheit der Oeffnung l_s, und wird also gewöhnlich $u_s = q$ (Totalbelastung) oder $u_s = p$ (Eigengewicht) bedeuten. Die Stützen brauchen nicht gleich hoch zu liegen. Für n Pfeilermomente existiren n Gleichungen von der Form:

a $$M_{r-1} l_{r-1} + 2 M_r (l_{r-1} + l_r) + M_{r+1} l_r = -\left[\frac{c_{r-1} - c_r}{l_{r-1}} + \frac{c_{r+1} - c_r}{l_r}\right] 6 E \Theta - \tfrac{1}{4} u_{r-1} l_{r-1}^3 - \tfrac{1}{4} u_r l_r^3$$

Bei eingespannten Trägerenden sind für 2 Widerlagermomente noch 2 weitere Gleichungen nöthig:

b $$2 M_0 l_0 + M_1 l_0 = \left[\tau_0 - \frac{c_1 - c_0}{l_0}\right] 6 E \Theta - \tfrac{1}{4} u_0 l_0^3$$

c $$M_n l_n + 2 M_{n+1} l_n = \left[\frac{c_{n+1} - c_n}{l_n} - \tau_{n+1}\right] 6 E \Theta - \tfrac{1}{4} u_n l_n^3$$

In irgend einer Oeffnung l_s sind die vertikalen Schubkräfte unmittelbar an den Stützen:

d $$V_0 = -A_s = \frac{1}{l_s}\left[M_s - M_{s+1} - \tfrac{1}{2} u_s l_s^2\right]$$

e $$V_l = A_s' = \frac{1}{l_s}\left[M_s - M_{s+1} + \tfrac{1}{2} u_s l_s^2\right]$$

Für das Moment und die vertikale Schubkraft in einem beliebigen Punkte x der Oeffnung l_s hat man:

f $$M_x = M_s \frac{l_s - x}{l_s} + M_{s+1} \frac{x}{l_s} + \tfrac{1}{2} u_s x (l_s - x)$$

g $$V_x = u_s x - A_s$$

In jeder Oeffnung l_s liegt das positive Maximalmoment bei:

h $$\mu_s = \frac{A_s}{u_s} = \frac{M_{s+1} - M_s}{u_s\, l_s} + \tfrac{1}{2}\, l_s$$

und sein Werth ist:

i $$M_\mu = M_s + \tfrac{1}{2}\, u_s\, \mu_s^2$$

Reaktion der Stütze r allgemein

k $$T_r = A'_{r-1} + A_r$$

also im Besondern

l $$T_0 = A_0,\quad T_{n+1} = A_n'$$

Spezifische horizontale Schubkraft im beliebigen Querschnitt x, in Entfernung η von der neutralen Schicht — Genaueres darüber und über schiefe Spannungen in den §§. 9.—11. —

m $$H_\eta = -\frac{V_x}{\Theta} \sum_{\eta}^{a} \mathfrak{F}\, \eta$$

Gleichung der elastigen Linie in l_s

n $$y = c_s + \tau_s\, x - \frac{x^2}{6\, E\, \Theta}\left[3\, M_s + A_s\, x - \tfrac{1}{4}\, u_s\, x^2\right]$$

Ort der grössten Einsenkung in l_s

o $\mathfrak{c}_s$ aus $$\tau_s - \frac{c_{s+1} - c_s}{l_s} - \frac{\mathfrak{c}_s}{2\, E\, \Theta}\left[2\, M_s + A_s\, \mathfrak{c}_s - \tfrac{1}{3}\, u_s\, \mathfrak{c}_s^2\right] = 0$$

Werth der grössten Einsenkung in l_s

p $$\mathfrak{E}_s = \left[\tau_s - \frac{c_{s+1} - c_s}{l_s}\right]\mathfrak{c}_s - \frac{\mathfrak{c}_s^2}{6\, E\, \Theta}\left[3\, M_s + A_s\, \mathfrak{c}_s - \tfrac{1}{4}\, u_s\, \mathfrak{c}_s^2\right]$$

In diesen Gleichungen ist

q $$\tau_s = \frac{c_{s+1} - c_s}{l_s} + \frac{l_s}{6\, E\, \Theta}\left[M_s + M_{s+1} + \tfrac{1}{4}\, u_s\, l_s^2\right]$$

Vergleicht man diese Formeln mit denen des § 32., so sieht man, dass unsre für ganz beliebige Belastungen geltenden Gleichungen ebenso einfach und noch durchsichtiger sind, wie die für den jetzt behandelten speziellen Fall bestehenden. Es wäre mit den letztern nicht möglich gewesen, eine umfassende Theorie des Orts der Lasten aufzustellen, und zwar deshalb nicht, weil die Wirkung der einzeln Last oder des Lastelements gar nicht mehr hervortritt, sondern in den Ausdrücken $u\, x^2$, $u\, x^3$, $u\, l^3$ u. s. w. vollständig begraben liegt. Die Aufstellung der allgemeinen Formeln in explicirter Form und frei von Integralen hängt wesentlich davon ab, nicht nur über stetige Funktionen, sondern auch über beliebige concentrirte Kräfte frei hinweg zu integriren. Wie dies zu geschehen hat und die allgemeinsten Formeln in dieser Beziehung sind in dem Kapitel „Integrationen“ angegeben.

Wenn die Belastung auf der ganzen Länge einer Oeffnung gleichmässig vertheilt wirkt, mag der Träger einfach oder continuirlich sein, so ist die Momentencurve eine Parabel und man kann beabsichtigen, sie als solche zu construiren. Es geschieht dies oft bei continuirlichen Trägern, obschon kein grosser Vortheil dabei. Der Maximalmomentenpunkt μ als Scheitel der Momentencurve ist bekannt, ebenso die Punkte über den l_s begränzenden Stützen $M_0 = M_s$, $M_l = M_{s+1}$. Sehr wenig Zwischenpunkte nach Gleichung f genügen, um die ganze Curve festzulegen; denn jeder gefundene Punkt kann symmetrisch zum Maximalmomentenpunkt übertragen werden, wenn man nur überhaupt weiss, dass die Curve eine Parabel ist.

Soll zu irgend einem Zweck von der parabolischen Form der Momentencurve Gebrauch gemacht werden, hier das Nähere.

Bei gleichmässiger Belastung mit u pro Längeneinheit innerhalb einer Oeffnung l ist für jeden Querschnitt x derselben

r $$M_x = M + A\,x - \tfrac{1}{2}\,u\,x^2$$

Man setze nun

s $$X = M - M_x + \frac{A^2}{2u}$$

t $$Y = \pm\left(x - \frac{A}{u}\right)$$

so wird aus der Gleichung für M_x

u $$Y^2 = \frac{2}{u}\,X$$

die Scheitelgleichung einer Parabel vom Parameter $\frac{2}{u}$. Aus s folgt

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{dM_x}{dx}$$

d. h. es fallen das Maximum von M_x nämlich $M_x = M_\mu$ und das Minimum von X, nämlich $X = 0$ zusammen. Nach u ist aber Bedingung für das Minimum von X

$$\frac{dX}{dY} = u\;Y = 0$$

wonach Maximalmomentenpunkt und Scheitel der Parabel bei

v $$\mu = \frac{A}{u}$$

Wird noch $A = u\,\mu$ in die Gleichung für M_x substituirt, so folgt

i $$M_\mu = M + \tfrac{1}{2}\,u\,\mu^2$$

oder auch

w $$M_\mu = M + \frac{A^2}{2u}$$

sodass

x $$X = M_\mu - M_x$$

y $$Y = \pm\,(x - \mu)$$

Entfernung irgend eines Punktes der Parabel von der x Achse

z $$M_x = M_\mu - X$$

und Folgendes ist festgestellt:

1) Bei Belastung der ganzen Oeffnung l durch eine gleichmässig vertheilte Last von u pro Längeneinheit ist die Momentencurve eine Parabel vom Parameter $\frac{2}{u}$;

2) der Scheitel der Parabel liegt um M_μ senkrecht unter dem Maximalmomentenpunkt μ;

3) die Momentencurve verläuft, soweit beide Aeste reichen, symmetrisch zu der Vertikalen durch den Maximalmomentenpunkt μ, der Achse der Parabel;

4) die Wendepunkte der elastigen Linie, in welchen $M_x = 0$, liegen gleichweit vom Punkte $x = \mu$ ab.

Nachdem die Stützenmomente bestimmt sind, kennt man von der Parabel 2 Punkte über den Stützen, sodann Scheitel, Parameter, damit auch Brennpunkt, Directrix, also mehr wie genug Stücke um die Parabel zu construiren.

Bei einfachen Trägern mit frei aufliegenden Enden und gleichmässig vertheilter Belastung auf die ganze Länge endigen die Aeste der Parabel in den Stützpunkten; es ist

$$M = 0,\ A = \tfrac{1}{2} u\, l$$
$$M_x = \tfrac{1}{2} u\, x\, (l - x)$$
$$M_\mu = \tfrac{1}{8} u\, l^2$$

Scheitel der Parabel bei $x = \mu = \frac{l}{2}$

Entfernung desselben von der Verbindungsgeraden der Stützpunkte als Achse der x

$$\frac{A^2}{2u} = M_\mu$$

Parameter $\frac{2}{u}$

Coordinaten der Parabel in Bezug auf ihren Scheitel

$$X = M_\mu - M_x$$
$$Y = \pm \left(x - \frac{l}{2}\right)$$

Ordinate eines Punktes der Parabel in Bezug auf die Achse der x

$$M_x = M_\mu - X.$$

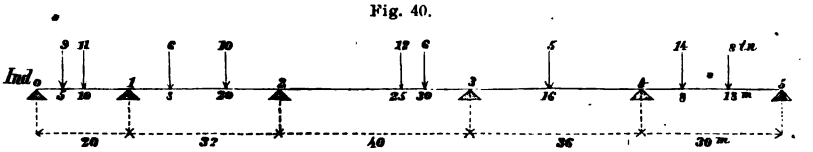
IV. Abschnitt.

Beispiele, Berechnungen, praktische Gesichtspunkte.

§. 46. Beispiele zur Erläuterung des II. Abschnitts.

Ein Träger mit 5 Oeffnungen ist gegeben (Fig. 40). Die Enden liegen frei auf. $l_0 = 20^m$, $l_1 = 32^m$, $l_2 = 40^m$, $l_3 = 36^m$, $l_4 = 30^m$.

Fig. 40.



Zu § 17. Beispiel 1. Die λ-Systeme für Berechnung des Trägers anzusetzen.

In den Systemen aller Stützen ist $\lambda_0 = 0$, $\lambda_{n+1} = \lambda_5 = 0$

λ-System für die Stütze 1. (Ind. 1.)

$104\,\lambda_1 + 32\,\lambda_2 = 1$	$\lambda_1 =$	λ_1	$\lambda_1 = +\,0{,}01038$
$32\,\lambda_1 + 144\,\lambda_2 + 40\,\lambda_3 = 0$	$\lambda_2 = -\frac{391}{1622}\,\lambda_1$		$\lambda_2 = -\,0{,}00250$
$40\,\lambda_2 + 152\,\lambda_3 + 36\,\lambda_4 = 0$	$\lambda_3 = -\frac{110}{391}\,\lambda_2$		$\lambda_3 = +\,0{,}00070$
$36\,\lambda_3 + 132\,\lambda_4 = 0$	$\lambda_4 = -\frac{3}{11}\,\lambda_3$		$\lambda_4 = -\,0{,}00019$

λ-System für die Stütze 2. (Ind. 2.)

$104\,\lambda_1 + 32\,\lambda_2 = 0$	$\lambda_1 = -\frac{4}{13}\,\lambda_2$		$\lambda_1 = -\,0{,}00250$
$32\,\lambda_1 + 144\,\lambda_2 + 40\,\lambda_3 = 1$	$\lambda_2 =$	λ_2	$\lambda_2 = +\,0{,}00813$
$40\,\lambda_2 + 152\,\lambda_3 + 36\,\lambda_4 = 0$	$\lambda_3 = -\frac{110}{391}\,\lambda_2$		$\lambda_3 = -\,0{,}00228$
$36\,\lambda_3 + 132\,\lambda_4 = 0$	$\lambda_4 = -\frac{3}{11}\,\lambda_3$		$\lambda_4 = +\,0{,}00062$

λ-System für die Stütze 3. (Ind. 3.)

$104\,\lambda_1 + 32\,\lambda_2 = 0$	$\lambda_1 = -\frac{4}{13}\,\lambda_2$		$\lambda_1 = +\,0{,}00070$
$32\,\lambda_1 + 144\,\lambda_2 + 40\,\lambda_3 = 0$	$\lambda_2 = -\frac{65}{218}\,\lambda_3$		$\lambda_2 = -\,0{,}00229$
$40\,\lambda_2 + 152\,\lambda_3 + 36\,\lambda_4 = 1$	$\lambda_3 =$	λ_3	$\lambda_3 = +\,0{,}00768$
$36\,\lambda_3 + 132\,\lambda_4 = 0$	$\lambda_4 = -\frac{3}{11}\,\lambda_3$		$\lambda_4 = -\,0{,}00209$

λ-System für die Stütze 4. (Ind. 4.)

$104\,\lambda_1 + 32\,\lambda_2 = 0$	$\lambda_1 = -\frac{4}{13}\,\lambda_2$		$\lambda_1 = -\,0{,}00019$
$32\,\lambda_1 + 144\,\lambda_2 + 40\,\lambda_3 = 0$	$\lambda_2 = -\frac{65}{218}\,\lambda_3$		$\lambda_2 = +\,0{,}00062$
$40\,\lambda_2 + 152\,\lambda_3 + 36\,\lambda_4 = 0$	$\lambda_3 = -\frac{981}{3817}\,\lambda_4$		$\lambda_2 = -\,0{,}00209$
$36\,\lambda_3 + 132\,\lambda_4 = 1$	$\lambda_4 =$	λ_4	$\lambda_4 = +\,0{,}00814$

Ein weiteres Beispiel gibt § 49. Ueber einfache Träger siehe Beispiel 6 des laufenden Kapitels, über Träger veränderlichen Querschnitts in §§. 30., 51.

Beispiel 2. Der Träger sei nun in der aus Fig. 40 ersichtlichen Weise belastet, wobei die Lasten in Tonnen, die Abscissen ihrer Angriffspunkte in Metern angegeben sind. Die Werthe der R für gleichhohe Stützpunkte zu bestimmen.

Durch Substitution der Zahlenwerthe in

$$R_r = -\frac{1}{l_{r-1}} \sum_{r-1} P\,a\,(l-a)\,(l+a) - \frac{1}{l_r} \sum_{r} P\,a\,(l-a)\,(2\,l-a)$$

erhält man

$$R_1 = -\tfrac{1}{210}(\,9\cdot 5\cdot 25\cdot 15 + 11\cdot 10\cdot 30\cdot 10) - \tfrac{1}{312}(\,6\cdot 8\cdot 24\cdot 56 + 10\cdot 20\cdot 12\cdot 44) = -\,7810$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{312}(\,6\cdot 8\cdot 40\cdot 24 + 10\cdot 20\cdot 52\cdot 12) - \tfrac{1}{410}(12\cdot 25\cdot 15\cdot 55 + 6\cdot 30\cdot 10\cdot 50) = -\,13777$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{410}(12\cdot 25\cdot 65\cdot 15 + 6\cdot 30\cdot 70\cdot 10) - \tfrac{1}{356}(\,5\cdot 16\cdot 20\cdot 56\quad) = -\,12931$$
$$R_4 = -\tfrac{1}{356}(\,5\cdot 16\cdot 52\cdot 20\quad) - \tfrac{1}{310}(14\cdot 8\cdot 22\cdot 52 + 8\cdot 18\cdot 12\cdot 42) = -\,8969$$

Weitere Beispiele in den § 49., 51., 53., 54.

Beispiel 3. Das Stützenmoment M_2 mittelst der λ zu bestimmen.

Es ist

$$M_2 = \sum_{1}^{4} \lambda\, R$$

wo die λ dem System der Stütze 2 zu entnehmen, also

$$M_2 = -\,0{,}00250\,R_1 + 0{,}00813\,R_2 - 0{,}00228\,R_3 + 0{,}00062\,R_4 = -\,68 \text{ mtn.}$$

Wollte man nun M_2 für eine ganze Reihe verschiedener Belastungen bestimmen, so würden sich in der vorstehenden Gleichung nur die Werthe der R ändern. Beispiele in §§. 49., 51.

Zu § 18. Beispiel 4. Sämmtliche Stützenmomente bei der gegebenen Belastung ohne Anwendung der λ zu bestimmen.

$$\begin{aligned}
104\,M_1 + 32\,M_2 &= -\,7810\\
32\,M_1 + 144\,M_2 + 40\,M_3 &= -\,13777\\
40\,M_2 + 152\,M_3 + 36\,M_4 &= -\,12931\\
36\,M_3 + 132\,M_4 &= -\,8969
\end{aligned}$$

$$M_1 = -\frac{7810 + 32\,M_2}{104}$$
$$M_2 = -\frac{11374 + 40\,M_3}{134}$$
$$M_3 = -\frac{9539 + 36\,M_4}{140}$$
$$M_4 = -\frac{6517}{123}$$

$$M_4 = -53 \text{ mtn}$$
$$M_3 = -55 \text{ mtn}$$
$$M_2 = -68 \text{ mtn}$$
$$M_1 = -54 \text{ mtn}$$

Weitere Beispiele in §§ 53., 55.

Beispiel 5. Die Quotienten B, B' für alle Oeffnungen anzugeben.

Aus der zweiten Colonne der Bedingungsgleichungen für die λ (Beisp. 1) ersieht man, dass ein bestimmtes Verhältniss z. B. $\frac{\lambda_3}{\lambda_2}$ in allen Systemen nur zwei verschiedene Werthe annimmt, nämlich

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -\frac{218}{65} = B_2 \text{ wenn Ind} \geqq 3$$

$$\frac{\lambda_3}{\lambda_2} = -\frac{110}{391} = B_2' \text{ wenn Ind} \leqq 2$$

und so liefern die angeschriebenen Systeme ohne Rechnung (B_0' und B_n aus 71, 72)

$$B_0 = -\infty \qquad B_0' = -\frac{4055}{19522}$$
$$B_1 = -\frac{13}{4} \qquad B_1' = -\frac{391}{1622}$$
$$B_2 = -\frac{218}{65} \qquad B_2' = -\frac{110}{391}$$
$$B_3 = -\frac{3817}{981} \qquad B_3' = -\frac{3}{11}$$
$$B_4 = -\frac{78088}{19085} \qquad B_4' = 0$$

Weiteres Beispiel in § 49., direkte Bestimmung ohne λ in § 47.

Beispiel 6. Die λ-Systeme für die einfachen Träger aufzustellen.

Alle l mit Ausnahme von $l_0 = l$ sind ∞ klein. Somit ist nach 67 beim Träger mit 2 eingespannten Enden für Stütze o

$$\left.\begin{array}{l} 2l\lambda_0 + l\ \lambda_1 = 1 \\ l\lambda_0 + 2l\,\lambda_1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \lambda_0 = +\frac{2}{3l} \\ \lambda_1 = -\frac{1}{3l} \end{array} \Bigg| B' = -\tfrac{1}{2}$$

und für Stütze l (1)

$$\left.\begin{array}{l} 2l\lambda_0 + l\,\lambda_1 = 0 \\ l\lambda_0 + 2l\,\lambda_1 = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \lambda_0 = -\frac{1}{3l} \\ \lambda_1 = +\frac{2}{3l} \end{array} \Bigg| B = -2$$

Es ist also auch hier

$$M^0 = \lambda_0\, R_0 + \lambda_1\, R_1$$
$$M' = \lambda_0\, R_0 + \lambda_1\, R_1$$

wo R_0, R_1 durch die allgemeinen Formeln (58, 59) bestimmt, λ_0, λ_1 bei Berechnung von M_0 dem ersten, bei M' dem zweiten der vorstehenden Systeme zu entnehmen sind.

Ist der Träger nur bei $x_1 = 0$ eingespannt, während er bei $x = l$ frei aufliegt, so reduzirt sich das System der λ für Stütze o auf die eine Gleichung

$$2l\lambda_0 = 1 \quad \Big| \quad \lambda_0 = + \frac{1}{2l} \quad \Big| \quad B' = 0$$

und ist nach 71 $B = B_n = -2$ Bei horizontaler Einspannung und beliebiger Belastung wäre z. B.

$$R_0 = -\frac{1}{l} \overset{\iota}{\Sigma} P a (l - a) (2l - a)$$

$$M = -\frac{1}{2l^2} \overset{\iota}{\Sigma} P a (l - a) (2l - a)$$

(Vergl. § 41.) Für Stütze l existirt kein λ-System, oder alle λ sind 0, weil $M' = 0$, wie überall bei freier Auflagerung. Weiteres über einfache Träger in § 47., Beisp. 3—5).

Zu § 19. Beispiel 7. Die festen Influenzpunkte für den angenommenen Träger zu bestimmen.

Nachdem die B, B' bestimmt sind, folgen die Influenzpunkte aus 76, 77 für

Oeffnung l_0:	———	$\alpha_0' = 0{,}577\ l_0$
Oeffnung l_1:	$\alpha_1 = 0{,}385\ l_1$	$\alpha_0' = 0{,}627\ l_1$
Oeffnung l_2:	$\alpha_2 = 0{,}378\ l_2$	$\alpha_2' = 0{,}625\ l_2$
Oeffnung l_3:	$\alpha_3 = 0{,}380\ l_3$	$\alpha_3' = 0{,}617\ l_3$
Oeffnung l_4:	$\alpha_4 = 0{,}423\ l_4$	———

Für α_0' erhält man zunächst den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$. Da aber auch l_0 als letzte Oeffnung angenommen werden kann, so muss sein $\alpha_0' = l_0 - 0{,}423\ l_0 = 0{,}577\ l_0$. Influenzpunkte α_0, α_4' existiren nicht, weil die Momente M_0, M_4 stets 0 sind.

Weiteres Beispiel in § 53., direkte Bestimmung und feste Influenzpunkte einfacher Träger in § 47. Laufende Influenzpunkte Beisp. 17 — 19.

Zu § 20. Beispiel 8. Beim oben behandelten Träger sollen die Stützenmomente (Beisp. 4) ausgeglichen werden, ohne Aenderung von ΣR und mit der Bedingung, dass die zwei Endauflager in gleicher Höhe bleiben.

Es ist

$$\begin{aligned} 104\ M_1 + 32\ M_2 &= -\ 7810 \\ 32\ M_1 + 144\ M_2 + 40\ M_3 &= -\ 13777 \\ 40\ M_2 + 152\ M_3 + 36\ M_4 &= -\ 12931 \\ 36\ M_3 + 132\ M_4 &= -\ 8969 \end{aligned}$$

und soll werden

$$M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = M$$

aber bleiben

$$136\,M_1 + 216\,M_2 + 228\,M_3 + 168\,M_4 = -\,43487$$

dann folgt aus

$$(136 + 216 + 228 + 168)\,M = -\,43487$$
$$M = -\,58 \text{ mtn.}$$

Um dies zu erreichen, setzen wir

$$-\,136\,M = -\left(\frac{c_0 - c_1}{l_0} + \frac{c_2 - c_1}{l_1}\right) 6\,E\Theta - \;7810$$

$$-\,216\,M = -\left(\frac{c_1 - c_2}{l_1} + \frac{c_3 - c_2}{l_2}\right) 6\,E\Theta - 13777$$

$$-\,228\,M = -\left(\frac{c_2 - c_3}{l_2} + \frac{c_4 - c_3}{l_3}\right) 6\,E\Theta - 12931$$

$$-\,168\,M = -\left(\frac{c_3 - c_4}{l_3} + \frac{c_5 - c_4}{l_4}\right) 6\,E\Theta - \;8969$$

Nimmt man den Ursprung der Coordinaten im Stützpunkt 0 an, so ist $c_0 = 0$, $c_5 = 0$ und nach Transformation

$$\left(\frac{-c_1}{20} + \frac{c_2 - c_1}{32}\right) 6\,E\Theta = \;\;97$$

$$\left(\frac{c_1 - c_2}{32} + \frac{c_3 - c_2}{40}\right) 6\,E\Theta = -\,1219$$

$$\left(\frac{c_2 - c_3}{40} + \frac{c_4 - c_3}{36}\right) 6\,E\Theta = \;\;324$$

$$\left(\frac{c_3 - c_4}{36} + \frac{-c_4}{30}\right) 6\,E\Theta = \;\;798$$

$$\Sigma \qquad\qquad = \;\;0$$

Aus diesen vier Gleichungen erhält man die Werthe der vier Unbekannten

$$c_1 = +\,\frac{1468}{E\Theta}$$

$$c_2 = +\,\frac{4344}{E\Theta}$$

$$c_3 = -\,\frac{145}{E\Theta}$$

$$c_4 = -\,\frac{2197}{E\Theta}$$

Es sind also gegen die Horizontale $\overline{05}$ die Stützen 1 und 2 um c_1 resp. c_2 zu senken, die Stützen 3 und 4 um c_3 resp. c_4 zu heben.

Weiteres über Momentenausgleichungen und Beispiele in §§ 50., 53.

Zu § 21. Beispiel 9. Die Wirkung der Einzellast $P = 12$ tn bei $a = 25^{\text{m}}$ der Oeffnung l_2 des angenommenen Trägers auf Momente, Schubkräfte und Stützenreaktionen aller von l_2 verschiedenen Oeffnungen zu bestimmen. Stützhöhen gleich oder verschieden.

$$\begin{aligned} 104\,M_1 + 32\,M_2 &= 0 \\ 32\,M_1 + 144\,M_2 + 40\,M_3 &= -\tfrac{1}{40}\,12\cdot 25\cdot 15\cdot 55 \\ 40\,M_2 + 152\,M_3 + 36\,M_4 &= -\tfrac{1}{40}\,12\cdot 25\cdot 65\cdot 15 \\ 36\,M_3 + 132\,M_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$m_1 = +10 \text{ mtn} \quad m_3 = -42 \text{ mtn}$$
$$m_2 = -34 \text{ mtn} \quad m_4 = +11 \text{ mtn}$$

Vertikale Schubkräfte in den Oeffnungen l_0, l_1, l_3, l_4

$$\begin{aligned} v_0 &= \tfrac{1}{20}(\ \ 0 - 10) = -0{,}50 \text{ tn} \\ v_1 &= \tfrac{1}{32}(\ 10 + 34) = +1{,}38 \text{ tn} \\ v_3 &= \tfrac{1}{36}(-42 - 11) = -1{,}47 \text{ tn} \\ v_4 &= \tfrac{1}{30}(\ 11 - \ 0) = +0{,}37 \text{ tn} \end{aligned}$$

Reaktionen der Stützen 0, 1, 4, 5

$$\begin{aligned} t_0 &= \ \ - v_0 = +0{,}50 \text{ tn} \\ t_1 &= v_0 - v_1 = -1{,}88 \text{ tn} \\ t_4 &= v_3 - v_4 = -1{,}84 \text{ tn} \\ t_5 &= v_4 \ \ \ = +0{,}37 \text{ tn} \end{aligned}$$

Es ist also z. B. das Verhältniss $\frac{V_4}{V_3} = -\frac{0{,}37}{1{,}47} = -0{,}25$ allein von den Längenverhältnissen des Trägers abhängig und findet sich auch direkt (86a)

$$\frac{V_4}{V_3} = -\frac{36}{30}\,\frac{(1-0)\frac{3}{11}}{1+\frac{3}{11}} = -0{,}25$$

Für

$$\frac{V_0}{V_1} = -\frac{0{,}50}{1{,}38} = 0{,}37$$

erhielte man mittelst der Formel 85a das unbestimmte $\frac{\infty}{\infty}$. Man kann jedoch auch l_0 als letzte Oeffnung betrachten (§ 18.) und wird dann

$$\frac{V_0}{V_1} = -\frac{32}{20}\,\frac{(1-0)\frac{4}{13}}{1+\frac{4}{13}} = -0{,}37$$

Zu § 22. Beispiel 10. Den Einfluss der gegebenen Einzellast in l_2 auf die Verhältnisse in dieser Oeffnung anzugeben.

Es wurde schon gefunden

$$m_2 = -34 \text{ mtn} \qquad m_3 = -42 \text{ mtn}$$

welche Werthe auch aus 88,89 direkt folgen müssen. Weiter ist

$$\begin{aligned} v_2 &= \tfrac{1}{40}(-34 + 42 - 12\cdot 15) = -4{,}30 \text{ tn} \\ v_2' &= \tfrac{1}{40}(-34 + 42 + 12\cdot 25) = +7{,}70 \text{ tn} \\ v_2' - v_2 &= a_2 + a_2' = 12 = P \\ t_2 &= v_1' - v_2 = +5{,}68 \text{ tn} \\ t_3 &= v_2' - v_3 = +9{,}17 \text{ tn} \end{aligned}$$

Selbstverständlich ist die Summe sämmtlicher Stützenreaktionen

$$0{,}50 - 1{,}88 + 5{,}68 + 9{,}17 - 1{,}84 + 0{,}37 = 12 = P$$

Ueber Influenzcurven siehe die Beispiele 20 und 21.

Zu § 23. Beispiel 11. Die festen Inflexionspunkte des gegebenen Trägers zu ermitteln.

Mittelst der schon berechneten B, B' (Beisp. 5) und durch die Formeln 95, 96 finden sich in

Oeffnung	l_0 :	$I_0 = 0$	$I_0' = 0{,}828\, l_0$
„	l_1 :	$I_1 = 0{,}235\, l_1$	$I_1' = 0{,}806\, l_1$
„	l_2 :	$I_2 = 0{,}230\, l_2$	$I_2' = 0{,}780\, l_2$
„	l_3 :	$I_3 = 0{,}207\, l_3$	$I_3' = 0{,}786\, l_3$
„	l_4 :	$I_4 = 0{,}196\, l_4$	I_4' l_4

Ueber feste Inflexionspunkte einfacher Träger siehe § 47. Beisp. 3 und 4.

Beispiel 12. Die laufenden Inflexionspunkte der in der Oeffnung l_2 bei $a = 25^m$ wirkenden Last $P = 12$ tn zu bestimmen.

Es ist gefunden $m_2 = -34$, $m_3 = -42$ und wird also nach 97, 98

$$I_a = \frac{-34}{-34+42-12\,.\,15}\, l_2 = 7{,}91^m$$

$$I_a' = \frac{-34+12\,.\,25}{-34+42+12\,.\,25}\, l_2 = 34{,}55^m$$

Zu § 24. liefern Beispiele die §§ 49., 51., 53., 54.

Zu § 25. Beispiel 13. Den Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke für den Querschnitt $x = 4$ der Oeffnung l_2 zu ermitteln.

$$B_2 = -\frac{218}{65}\,,\quad B_2' = -\frac{110}{391}$$

$$h = 40 - 4 - 4\,\frac{110}{391} = 34{,}88$$

$$k = 40 - 4 - 4\,\frac{218}{65} = 22{,}59$$

$$\beta = -\frac{218}{65} + \frac{110}{391} = -3{,}07$$

Setzt man diese Werthe in Formel 100 ein, so ergibt sich

$$g_x = 0{,}227\, l_2 = 9{,}08^m$$

Beispiel 14. Den Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke für den Querschnitt $x = 32$ der Oeffnung l_3 zu bestimmen.

$$B_3 = -\frac{3817}{981}\,,\quad B_3' = -\frac{3}{11}$$

$$h = 36 - 32 - 32\,\frac{3}{11} = -4{,}73$$

$$k = 36 - 32 - 32\,\frac{3817}{981} = -120{,}51$$

Mit diesen Werthen gibt die Formel 101

$$g_x' = 0{,}711\, l_3 = 25{,}60^{\text{m}}$$

Schon diese 2 Beispiele zeigen, wie falsch es ist, wenn, wie gewöhnlich, der Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke mit dem Querschnitt selbst identificirt wird. Noch klarer wird es, wenn man bedenkt, dass für den Querschnitt I dieser Grenzpunkt bei l und für I' bei 0 liegt, sodass x und g_x oder x und g_x' nun über $^3/_4 l$ von einander getrennt liegen. Für einfache Träger § 47., Beisp. 5.

Beispiel 15. Den Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke für den Querschnitt $x = 18$ der Oeffnung l_0 anzugeben.

Wollte man hier nach der Formel für g_x' berechnen, so würde der unbestimmte Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$ resultiren. Man betrachte deshalb l_0 vorübergehend als letzte Oeffnung, dann ist (73)

$$(B_0) = -\frac{19522}{4055} \quad (B_0') = 0$$

$$h = 20 - 2 + 0 = 18$$

$$k = 20 - 2 - 2\,\frac{19522}{4055} = 8{,}364$$

$$(\beta) = (B_0) - (B_0') = -4{,}818$$

und durch Substitution dieser Werthe in Formel 100 wird

$$(g_x) = l_0 - g_x' = 0{,}318\, l_0$$

$$g_x' = 0{,}682\, l_0 = 13{,}64^{\text{m}}$$

Beispiel 16. Den Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecke für den Querschnitt $x = 0{,}828\, l_0$ der Oeffnung l_0 zu berechnen.

Wie im vorigen Beispiel betrachten wir für einen Augenblick die erste Oeffnung als letzte und haben

$$(B_0) = -4{,}818 \quad (B_0') = 0$$

$$h = l_0 - 0{,}172\, l + 0 = 0{,}828\, l_0$$

$$k = l_0 - 0{,}172\, l_0 - 4{,}818 \cdot 0{,}172\, l_0 = 0$$

mit diesen Werthen wird

$$(g_x) = l_0 - g_x' = l_0 \quad \text{also}$$

$$g_x' = 0$$

Dieses Resultat war vorauszusehen, indem bei $0{,}828\, l_0$ der feste Inflexionspunkt I_0' liegt.

Zu § 26. Beispiel 17. Den laufenden Influenzpunkt für den Querschnitt $x = 4$ der Oeffnung l_2 zu ermitteln. (Vergl. Beisp. 13.)

$$B_2 = -\frac{218}{65}, \quad B_2' = -\frac{110}{391}$$

$$h = 34{,}88, \quad k = 22{,}59, \quad \beta = -3{,}07$$

Nach Substitution dieser Werthe in Formel 102 erhält man

$$\alpha_x = 0{,}524\, l_2 = 20{,}96^{\text{m}}$$

Das negative Moment im Querschnitt $x = 4$ wird also um so grösser, je mehr sich alle Lasten dem Punkte $\alpha_x = 20{,}96^m$ nähern. Das positive Moment bei $x = 4$ wird um so grösser, je mehr sich die Lasten von α_x gegen $x = 4$ besonders und auch gegen $a = l$ entfernen.

Beispiel 18. Den laufenden Influenzpunkt für den Querschnitt $x = 32$ der Oeffnung l_3 zu bestimmen. (Vergl. Beisp. 14.)

$$B_3' = -\frac{3}{11}, \quad B_3 = -\frac{3817}{981}$$

$$h = -4{,}73, \quad k = -120{,}51$$

$$\beta = -\frac{3817}{981} + \frac{3}{11} = 3{,}62$$

Mit diesen Substitutionen gibt Formel 103

$$\alpha_x' = 0{,}434\, l_3 = 15{,}62^m$$

Beispiel 19. Die laufenden Influenzpunkte für den Querschnitt $x = 0{,}196\, l_4$ der Oeffnung l_4 zu berechnen.

$$B_4 = -4{,}092, \quad B_4' = 0$$
$$h = l_4 - 0{,}196\, l_4 + 0 = 0{,}804\, l$$
$$k = l_4 - 0{,}196\, l_4 - 0{,}196 \cdot 4{,}092\, l_4 = 0$$
$$\beta = B_4 - B_4' = -4{,}092$$

Die Formel 102 gibt nach Einsetzen dieser Werthe

$$\alpha_x = l_4$$

Dies konnte direkt beurtheilt werden, weil bei $0{,}196\, l_4$ der feste Inflexionspunkt I_4 liegt.

Ueber feste Influenzpunkte siehe Beispiel 7 und § 53., über Influenzpunkte einfacher Träger in § 47.

Zu §§ 27–29 liefern Beispiele die §§ 49., 51., 53., 54.

Influenzcurven. Beispiel 20. Die Influenzcurve (§ 22.) für das Moment M_x im Querschnitt $x = 32$ der Oeffnung l_3 herzustellen (Taf. II).

Die Curve schneidet die Abscissenachse bei allen Stützen und ausserdem im Punkte $g_x' = 25{,}60^m$ (Beisp. 14); sie erreicht in l_3 ihr negatives Maximum beim Influenzpunkt $\alpha_x = 15{,}62^m$ (Beisp. 18) und hat eine Ecke (positives Maximum) beim Querschnitt x selbst.

Die Curventheile innerhalb l_0, l_1, l_2 enthalten Maxima oder Minima bei α_0', α_1', α_2', der Curventheil in l_4 culminirt bei α_4.

Bestimmt man den verhältnissmässigen Beitrag einer Last P (der Werth von P darf undefinirt bleiben) für die angeführten besondern Angriffspunkte, sowie für einige Zwischenpunkte, so kann die Influenzcurve aufgestellt werden. Folgende Formeln kommen zur Verwendung:

wenn P ausserhalb l_3

83 $$m_x = m_3 + \frac{x}{l_3}(m_4 - m_3)$$

wenn P innerhalb l_3 vor $x = 32$

91a $$m_x = m_3 + \frac{x}{l_3}(m_4 - m_3 - Pa) + Pa$$

wenn P innerhalb l_3 nach $x = 32$

91 $$m_x = m_3 + \frac{x}{l_3}(m_4 - m_3 + P(l_3 - a))$$

In jedem Falle müssen also m_3, m_4 für die verschiedenen Angriffspunkte bekannt sein. Dieselben finden sich direkt (Beisp. 4,9) oder mittelst des λ. Letztere Methode ist am bequemsten.

Es sei z. B. die Last P in l_2 bei $a = 16$, dann werden — r_2, r_3 bedeuten der eingeführten Bezeichnung gemäss die Zunahmen von R_2, R_3 in Folge der Einzellast P (§§ 17., 21.) —

$$r_2 = -\tfrac{1}{40}\ 16 \cdot 24 \cdot 64\ P = -614{,}4\ P$$
$$r_3 = -\tfrac{1}{40}\ 16 \cdot 24 \cdot 56\ P = -537{,}6\ P$$
$$m_3 = +0{,}00229 \cdot 614{,}4\ P - 0{,}00768 \cdot 537{,}6\ P = -2{,}722\ P$$
$$m_4 = -0{,}00062 \cdot 614{,}4\ P + 0{,}00209 \cdot 537{,}6\ P = +0{,}742\ P$$
$$m_x = -2{,}722\ P + \tfrac{32}{36}(0{,}742 + 2{,}722)\ P = +0{,}357\ P$$

Dieser Werth ist also bei $a = 16$ der Oeffnung l_2 in irgend einem Maassstab nach unten aufzutragen.

Es wirke ferner die Last P in l_3 bei $a = 30$, dann folgen

$$r_3 = -\tfrac{1}{36}\ 30 \cdot 6 \cdot 42\ P = -210\ P$$
$$r_4 = -\tfrac{1}{36}\ 30 \cdot 6 \cdot 66\ P = -330\ P$$
$$m_3 = -0{,}00768 \cdot 210\ P + 0{,}00209 \cdot 330\ P = -0{,}923\ P$$
$$m_4 = -0{,}00209 \cdot 210\ P - 0{,}00814 \cdot 330\ P = -2{,}247\ P$$
$$m_x = -0{,}923\ P + \tfrac{32}{36}(-2{,}247 + 0{,}923 - 30)\ P + 30\ P = +1{,}233\ P.$$

Dieser Werth wird bei $a = 30$ der Oeffnung l_3 ebenfalls nach unten im selben Maassstab aufgetragen.

Nachdem so die m_x für eine genügende Anzahl a auf der ganzen Länge des Trägers bestimmt und, je nachdem ihr Werth sich positiv oder negativ fand, von der Abscissenachse aus nach unten oder oben aufgetragen worden, ergab sich die Influenzcurve Taf. II, III. Dieselbe lässt für jeden Angriffspunkt a den verhältnissmässigen Beitrag einer Last P zum Moment bei $x = 32$ der Oeffnung l_3 direkt abgreifen; sie gibt ein vollständiges Bild von dem Sinn und dem Abnehmen dieses Einflusses mit der Entfernung vom Querschnitt x und in den verschiedenen Oeffnungen.

Um die Influenzcurve für den gegebenen Querschnitt zu bestimmen, war es nöthig, auch m_3 und m_4 für die verschiedenen Angriffspunkte der Last P zu berechnen. Man kann also die Influenzcurven für die Querschnitte $x = 0$ und $x = l$ der Oeffnung l_3, d. h. die

Influenzcurven für die Momente M_3 und M_4 ohne weitere Rechnung auftragen und ist dies für M_4 geschehen (Taf. II, IV.)

Als weitere charakteristische Formen sind noch die Influenzcurven für das Moment in den Querschnitten $x = l_3'$ und $x = 20$ der Oeffnung l_3 construirt (Taf. II, II, I).

Sobald die Influenzcurve für irgend ein M_x berechnet ist, bietet es nur noch wenig Schwierigkeit, die Curven für beliebige andre Querschnitte derselben Oeffnung herzustellen, indem dann die Berechnung der m wegfällt. Weiteres über Influenzcurven in § 59.

Beispiel 21. Die Influenzcurve für die vertikale Schubkraft im Querschnitt $x = 20$ der Oeffnung l_3 zu construiren

Die Curve schneidet die Abscissenachse bei allen Stützen, sie hat eine Unstetigkeit bei $a = x$, wo der Sprungwerth der Ordinate gleich der Last P selbst. Die Curventheile innerhalb l_0, l_1, l_2 enthalten Maxima oder Minima bei α_0', α_1', α_2', der Curventheil innerhalb l_1 erreicht seinen tiefsten Punkt bei $a = \alpha_4$.

Man bestimmt auch hier den Beitrag der Last P zu V_x für die vorstehenden besondern Angriffspunkte und für einige Zwischenpunkte, wonach die Influenzcurve aufgezeichnet werden kann. Zur Verwendung kommen folgende Formeln:

wenn P ausserhalb l_3

84 $$v_x = \frac{1}{l_3}(m_3 - m_4)$$

wenn P innerhalb l_3 vor $x = 20$

92a $$v_x = \frac{1}{l_3}(m_3 - m_4 + Pa)$$

wenn P innerhalb l_3 nach $x = 20$

92 $$v_x = \frac{1}{l_3}(m_3 - m_4 - P(l_3 - a))$$

Sind m_3, m_4 für die verschiedenen Angriffspunkte bereits bestimmt, dann ist das Weitere sehr einfach, sonst müssen sie wie in Beispiel 20 oder direkt (Beisp. 4,9) berechnet werden.

Wirkt z. B. die Last bei $a = 16$ der Oeffnung l_2, so ist $m_3 = -2{,}722\,P$, $m_4 = +0{,}742\,P$ und

$$v_x = \tfrac{1}{36}(-2{,}722 - 0{,}742)\,P = -0{,}096\,P$$

Die Last wirke bei $a = 30$ der Oeffnung l_3, dann wird $m_3 = -0{,}923\,P$, $m_4 = -2{,}247\,P$ und

$$v_x = \tfrac{1}{36}(-0{,}923 + 2{,}247 - 6)\,P = -0{,}130\,P$$

Für $a = 20$ in l_3 sind die Zunahmen $m_3 = -2{,}510\,P$, $m_4 = -3{,}082\,P$. Nimmt man nun an, P befinde sich ∞ dicht vor x, so folgt

$$v_x = \tfrac{1}{36}\,(-\,2{,}510 + 3{,}082 + 20)\,P = +\,0{,}572\,P$$

und verlegt man P ∞ dicht nach x, so ergibt sich

$$v_x = \tfrac{1}{36}\,(-\,2{,}510 + 3{,}082 - 16)\,P = -\,0{,}428\,P$$

Danach beträgt die Unstetigkeit oder der Sprungwerth bei x

$$0{,}572\,P + 0{,}428\,P = P$$

Der Curvenzug in l_0, l_1, l_2, l_4 ist für alle Querschnitte von l_3 derselbe. Auch innerhalb l_3 ist der Verlauf der Influenzcurve (wie die Formeln für v_x zeigen) nur insofern abhängig von x, als es darauf ankommt, wie lange P vor und wie lange nach x bleibt.

Sind die Influenzcurven für die vertikalen Schubkräfte bei $x=0$ und $x = l$ der Oeffnung l_3 bestimmt, so fallen beide innerhalb l_0, l_1, l_2, l_4 zusammen, während sie in l_3 überall um P senkrecht von einander abstehen.

Hat man nun die zwei Curvenzüge, soweit sie in l_3 verlaufen, einstweilen punktirt, und es soll die Influenzcurve für irgend einen Querschnitt x von l_3 hergestellt werden, so errichtet man in x eine Vertikale, zieht vor x den Curventheil über-, nach x den Curventheil unterhalb der Abscissenachse aus und die Influenzcurve für die vertikale Schubkraft bei x ist fertig.

Die Influenzcurven für die vertikalen Schubkräfte könnten in ähnlicher Weise Verwendung finden, wie in § 59. die Influenzcurven der Momente, was allerdings praktisch von wenig Bedeutung.

§ 47. Bestimmung der Influenzpunkte, Inflexionspunkte und Grenzpunkte der Beitragsstrecken ohne Aufstellung der λ-Systeme.

Träger mit eingespannten Enden. Aus § 18. findet sich, mathematisch genau

114 $$B_0 = -\,2 \qquad B_1 = -\left(2 + \tfrac{3}{2}\,\frac{l_0}{l_1}\right)$$

115 $$B_n' = -\,\tfrac{1}{2} \qquad B_{n-1}' = -\,\frac{1}{2 + \tfrac{3}{2}\,\frac{l_n}{l_{n-1}}}$$

und für alle übrigen B, B' (mit Inbegriff von B_0' und B_n) sehr angenähert

116 $$B_m = -\left(2 + \tfrac{3}{2}\,\frac{l_{m-1}}{l_m}\right)$$

117 $$B_m' = -\,\frac{1}{2 + \tfrac{3}{2}\,\frac{l_{m+1}}{l_m}}$$

Träger mit frei aufliegenden Enden. Es ergiebt sich aus § 18., mathematisch genau

114a $B_0 = -\infty \qquad B_1 = -2\left(1 + \frac{l_0}{l_1}\right)$

115a $B_n' = 0 \qquad B_{n-1}' = -\frac{1}{2\left(1+\frac{l_n}{l_{n-1}}\right)}$

sehr angenähert

118 $$B_0' = -\frac{l_0\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_2}{l_1}\right)}{2(l_0+l_1)\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_2}{l_1}\right)-l_1}$$

119 $$B_n = -\frac{2(l_n+l_{n-1})\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}\right)-l_{n-1}}{l_n\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_{n-2}}{l_{n-1}}\right)}$$

und ebenso für die übrigen B, B' allgemein

116 $$B_m = -\left(2+\frac{3}{2}\frac{l_{m-1}}{l_m}\right)$$

117 $$B_m' = -\frac{1}{2+\frac{3}{2}\frac{l_{m+1}}{l_m}}$$

Nachdem so die B, B' bestimmt sind, können die Influenzpunkte, Inflexionspunkte und Grenzpunkte der Beitragsstrecken nach den gewöhnlichen Formeln berechnet werden, ohne dass es nöthig wäre, auf die λ-Systeme Rücksicht zu nehmen. Die Resultate sind für continuirliche Träger theilweise mathematisch genau, theilweise sehr angenähert. Mittelst der λ-Systeme erhält man nur mathematisch genaue Werthe, was aber für praktische Berechnungen nicht nöthig.

Beispiel 1. Die festen Influenzpunkte für den in § 46. angenommenen Träger aus den Längenverhältnissen direkt zu bestimmen.

Nach Obigem finden sich die B, B'

$B_0 = -\infty$	$B_0' = -0{,}21$
$B_1 = -3{,}25$	$B_1' = -0{,}26$
$B_2 = -3{,}20$	$B_2' = -0{,}29$
$B_3 = -3{,}67$	$B_3' = -0{,}27$
$B_4 = -4{,}07$	$B_4' = -0$

Substituirt man diese Werthe, den einzeln Oeffnungen l_s entsprechend, in

77 $$\alpha_s = \frac{1-\sqrt{1-\frac{1}{3}(1-B_s')(2+B_s')}}{1-B_s'}\,l_s$$

76 $$\alpha_s' = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{4}(1 - B_s)(2 + B_s)}}{1 - B_s} l_s$$

so ergeben sich folgende Abscissen der festen Influenzpunkte, welchen wir des Vergleichs halber die in Beispiel 7 mittelst der genauen Formeln gefundenen in Klammer beisetzen.

Oeffnung l_0 :	———	$\alpha_0' = 0{,}577\ l_0$ (0,577)
„ l_1 :	$\alpha_1 = 0{,}382\ l_1$ (0,385)	$\alpha_1' = 0{,}627\ l_1$ (0,627)
„ l_2 :	$\alpha_2 = 0{,}376\ l_2$ (0,378)	$\alpha_2' = 0{,}628\ l_2$ (0,625)
„ l_3 :	$\alpha_3 = 0{,}380\ l_3$ (0,380)	$\alpha_3' = 0{,}620\ l_3$ (0,617)
„ l_4 :	$\alpha_4 = 0{,}423\ l_4$ (0,423)	———

Auch hier erhält man für α_0' zunächst den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$; betrachtet man aber vorübergehend l_0 als letzte Oeffnung, so folgt $\alpha_0' = l_0 - 0{,}423\ l_0 = 0{,}577\ l_0$. Für continuirliche Träger mit frei aufliegenden Enden gilt ein für allemal $\alpha_0' = 0{,}577\ l_0$, $\alpha_n = 0{,}423 l_n$.

Beispiel 2. Die festen Inflexionspunkte für den in § 46. angenommenen Träger direkt aus den Längenverhältnissen zu bestimmen.

Die B, B' sind schon in Beispiel 1 gegeben, damit liefern die Formeln

95 $$I_s = \frac{l_s}{1 - B_s}$$

96 $$I_s' = \frac{l_s}{1 - B_s'}$$

Oeffnung l_0:	$I_0 = 0$ (0)	$I_0' = 0{,}826\ l_0$ (0,828)
„ l_1 :	$I_1 = 0{,}235\ l_1$ (0,225)	$I_1' = 0{,}793\ l_1$ (0,806)
„ l_2 :	$I_2 = 0{,}238\ l_2$ (0,230)	$I_2' = 0{,}775\ l_2$ (0,780)
„ l_3 :	$I_3 = 0{,}214\ l_3$ (0,207)	$I_3' = 0{,}786\ l_3$ (0,786)
„ l_4 :	$I_4 = 0{,}197\ l_4$ (0,196)	$I_4' = l_4$ (1)

Die Zahlen in den Klammern wurden in § 46. Beisp. 11 mittelst der genauen Formeln gefunden.

Die Bestimmung der laufenden Influenzpunkte und Inflexionspunkte sowie der Grenzpunkte der Beitragsstrecken, geschieht, nachdem die B, B' bekannt, ganz wie in den Beispielen des § 46.

Beispiel 3. Die festen Influenzpunkte und Inflexionspunkte für alle einfachen Träger mit zwei eingespannten Enden anzugeben.

Aus den λ-Systemen in § 46. Beisp. 6 oder nach den Formeln 114, 115 ist genau

$$B = -2 \qquad B' = -\tfrac{1}{2}$$

und damit ergeben die allgemeinen Formeln für α_s, α_s'

$$\alpha = \tfrac{1}{3} l \qquad \alpha' = \tfrac{2}{3} l$$

und die diejenigen für I_s, I_s'

$$I = \tfrac{1}{3}\, l \qquad I' = \tfrac{2}{3}\, l$$

Es fallen feste Influenzpunkte und feste Inflexionspunkte zusammen. Bei einfachen Trägern mit eingespannten Enden, deren Achse durch die Einspannung nicht deformirt worden (§ 37.), können also im mittlern Drittel der Spannweite niemals negative Momente entstehen (§ 25.).

Beispiel 4. Die festen Inflexionspunkte und den festen Influenzpunkt für alle Träger zu bestimmen, deren eines Ende eingespannt ist, während das andre frei aufliegt.

Der Ursprung der Coordinaten falle mit dem eingespannten Ende zusammen. Nach § 46. Beisp. 6 oder aus den Formeln 114, 115a ist genau

$$B = -2, \quad B' = 0$$

und durch Substitution in die allgemeinen Gleichungen

$$I = \tfrac{1}{3}\, l, \quad I' = l$$

$$\alpha = 0{,}423\, l$$

Ist durch die Einspannung an der ursprünglichen Form der neutralen Achse nichts geändert worden (§ 37.), so können zwischen $\frac{l}{3}$ und l niemals negative Momente vorkommen. (§ 25.)

Beispiel 5. Ein mit beiden Enden eingespannter Träger von $l = 20^{\mathrm{m}}$ Länge ist gegeben. Den Grenzpunkt g_x der positiven und negativen Beitragsstrecken und den Influenzpunkt α_x für den Querschnitt $x = 4^{\mathrm{m}}$ zu bestimmen.

Dass für diesen Querschnitt g_x und α_x innerhalb der Oeffnung existiren, folgt daraus, dass x zwischen o und I, nämlich zwischen o und $\frac{1}{3}\, l$ liegt. Es ist (99)

$$B = -2 \qquad B' = -\tfrac{1}{2}$$

$$h = 20 - 4 - \tfrac{1}{2}\, 4 = 14$$

$$k = 20 - 4 - 2 \cdot 4 = 8$$

$$\beta = -2 + \tfrac{1}{2} = -\tfrac{3}{2}$$

und folgt hiermit aus 100 und 102

$$g_x = \tfrac{1}{3}\, l = 6{,}66^{\mathrm{m}}$$

$$\alpha_x = \tfrac{5}{9}\, l = 11{,}11^{\mathrm{m}}$$

Um im Querschnitt $x = 4$ ein möglichst grosses negatives Moment zu erhalten, ist die Strecke von g_x bis l möglichst stark, die Strecke von o bis g_x möglichst wenig zu belasten. Es wird dann das negative M_x noch um so grösser, je mehr sich zwischen g_x und l alle Lasten, besonders die grössten derselben, dem Influenzpunkt α_x nähern. und jemehr sich von o bis g_x die etwa vorhandenen Lasten, besonders

die grössten darunter, von x gegen o und g_x entfernen. (§ 27.) Für ein möglichst grosses positives M_x kehren sich diese Bedingungen um. (§ 28.)

§ 48. Berechnung von Brückenträgern im Allgemeinen.

Die Hauptträger der Brücken liegen mit den Enden frei auf, daher bleiben in § 32. die Gleichungen 18, 19 ausser Betracht und lauten die erste und letzte Gleichung des Bedingungssystems 63 für continuirliche Träger

$$2\,M_1\,(l_0 + l_1) + M_2\,l_1 = R_1$$
$$M_{n-1}\,l_{n-1} + 2\,M_n\,(l_{n-1} + l_n) = R_n$$

Zur Lösung der Momentengleichungen mit λ-Systemen existiren ebensoviel Systeme wie Zwischenstützen. Ist die Anzahl der letztern nur 1 oder 2 und kommen wenig Belastungsfälle zur Verwendung, so bietet es keine Schwierigkeit, die Stützenmomente direkt zu berechnen (§ 46. Beisp. 4, §§ 53., 54.).

Fast allen praktischen Rechnungen wird ein gleichmässig vertheiltes Eigengewicht und eine ebensolche Totalbelastung zu Grunde gelegt. Die Formeln sind dann für continuirliche Träger aus §§ 32., 35. oder § 45., für einfache aus § 44. b zu entnehmen. Influenzpunkte werden nicht gebraucht, wohl aber bei continuirlichen Trägern die festen Inflexionspunkte, wenn eine genaue Curve der Maximalmomente nöthig ist.

Die Berechnung der Brückenträger hat den Zweck, die Dimensionen der einzeln Constructionstheile festzustellen. Es gehört dies in die Brückenbaukunde und wir bringen nur kurz Folgendes in Erinnerung.

Gurtungen. Sie sind den absolut grössten Momenten anzupassen. Bezeichnet $\mathfrak{H}_0$ Entfernung der Gurtungsschwerpunkte, so ist der grösste Zug oder Druck, dem die Gurtung im Querschnitt x zu widerstehen hat (§ 9.) — die Füllung vernachlässigt —

$$\max Q = \frac{\max M_x}{\mathfrak{H}_0}$$

Wenn also $\mathfrak{S}$ die zulässige Spannung pro Quadrateinheit, dann hat man als nöthigen Gurtungsquerschnitt bei x

$$F = \frac{\max Q}{\mathfrak{S}} = \frac{\max M_x}{\mathfrak{H}_0 \mathfrak{S}}$$

Will man bei Trägern mit vollen Wandungen den Widerstand der Vertikalplatte mit berücksichtigen, so kann folgende Näherungsformel Verwendung finden

$$F = \frac{\max M_x}{\mathfrak{H}_0 \mathfrak{S}} - \tfrac{1}{6}\,\delta\,\mathfrak{H}_0$$

worin δ die Dicke der Platte.

Bildet die Entfernung $\mathfrak{H}_0$ der Gurtungsschwerpunkte gerade das Mittel zwischen der Totalhöhe H und der lichten Höhe h des Trägers bei x, so ist genau (Laisle und Schübler)

$$F = \frac{\max M_x H}{\mathfrak{H}_0^2 \, \mathfrak{S}} - \tfrac{1}{6} \, \delta \, \mathfrak{H}_0$$

Nach der exakten Theorie soll der Querschnitt so sein, dass sein Trägheitsmoment bei x

$$\Theta = \frac{\max M_x \, \mathfrak{a}}{\mathfrak{S}}$$

wo $\mathfrak{a}$ die Entfernung der äussersten Faser von der neutralen Achse; doch sind die obigen Formeln für die gewöhnlichen Querschnitte der Brückenträger genau genug und bequemer.

Füllung. Dieselbe kann aus voller Wandung, Gitterwerk oder Fachwerk bestehen. Die Dimensionenberechnung geht von den Maximalwerthen der vertikalen Schubkräfte aus. Bei voller Wand braucht man zur Bestimmung der Stärke δ nur den absolut grössten Werth von V_x, welcher bei einer Stütze liegt. Um diese Schubkraft zu übertragen, würde genügen eine Platte von der Stärke

$$\delta = \frac{\max V}{\mathfrak{H}_0 \, \mathfrak{S}}$$

wegen der oft grössern schiefen Spannungen (§ 11.) empfiehlt es sich, $0{,}6\,\mathfrak{S}$ an Stelle von $\mathfrak{S}$ zu setzen (Laisle und Schübler), sodass

$$\delta = \frac{\max V}{0{,}6 \, \mathfrak{H}_0 \, \mathfrak{S}}$$

und hierin $\mathfrak{S}$ den gleichen Werth wie oben hat.

Diese Formeln gelten indess nur, wenn angenommen wird, dass die Mittelpunkte von Zug und Druck (§ 9.) mit den Gurtungsschwerpunkten zusammenfallen, was besonders bei Blechträgern nur ohngefähr richtig; die ersteren liegen wegen des vernachlässigten Widerstandes der Vertikalplatte um wenig näher nach der neutralen Achse. Soll dies berücksichtigt werden, so setze man in den obigen Gleichungen an Stelle von $\mathfrak{H}_0$

33
$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\sum_0^{\mathfrak{a}} \mathfrak{z}\eta}$$

wo Θ das Trägheitsmoment des ganzen Querschnitts und $\sum_0^{\mathfrak{a}} \mathfrak{z}\eta$ das statische Moment des gezogenen oder gedrückten Theils in Bezug auf die neutrale Schicht.

Besteht die Füllung aus Fachwerk oder Gitterwerk, dann können, wenn die Curve der Maximalschubkräfte vorhanden ist, die grössten Beanspruchungen der Füllungsglieder bestimmt werden. Wie dies zu geschehen hat, hängt von dem gewählten System ab und wird in der speciellen Theorie der Fach- und Gitterwerke gezeigt. (Culmann

„Graphische Statik", Laisle und Schübler „Der Bau der Brückenträger" II, Ritter „Dach- und Brückenconstructionen"). Ein Unterschied in der Behandlung continuirlicher und einfacher Träger existirt dabei nicht. Sollen die Diagonalen nur nach einer Richtung, auf Zug oder Druck allein, widerstehen, so müssen auf den Strecken, wo sowohl negative als positive Schubkräfte vorkommen können (Taf. III, AB und CD), Gegendiagonalen angebracht werden.

Niettheilung. Die Entfernung der Niete, durch welche die verschiedenen Eisensorten zu einer Gurtung vereinigt werden, muss so bemessen sein, dass dem absolut grössten Werth der horizontalen Schubkraft an der betreffenden Stelle mit der gehörigen Sicherheit widerstanden werden kann.

Die grösste spezifische horizontale Schubkraft im Querschnitt x auf die ganze Breite der neutralen Schicht ist nach § 9. angenähert

$$\max H_0 = -\frac{\max V_x}{\mathfrak{H}_0}$$

Die Formel wird genau, wenn an Stelle von $\mathfrak{H}_0$ wie oben

33
$$\mathfrak{H} = \frac{\Theta}{\sum_0^a \mathfrak{F}\eta}$$

gesetzt wird.

In Entfernung η von der neutralen Schicht ist die grösste spezifische horizontale Schubkraft auf die ganze Breite daselbst nach 28

$$\max H_\eta = -\max V_x \frac{\sum_\eta^a \mathfrak{F}\eta}{\Theta}$$

worin $\sum_\eta^a \mathfrak{F}\eta$ das statische Moment des darüber oder darunter liegenden Querschnittstheils in Bezug auf die neutrale Achse. Bei allen Querschnitten der Brückenträger nimmt die horizontale Schubkraft von der neutralen Achse bis zum Beginn der Gurtung nur wenig ab. Soll nun ein Niet nicht über $\mathfrak{s}$ angestrengt sein, so darf die Zahl der Niete bei x pro Längeneinheit und auf die ganze Breite angenähert gerechnet nicht unter

$$n = \frac{\max V_x}{\mathfrak{H}_0 \cdot \mathfrak{s}}$$

und genau gerechnet nicht unter

$$n = \frac{\max V_x \cdot \sum_\eta^a \mathfrak{F}\eta}{\mathfrak{s} \cdot \Theta}$$

betragen. Die erstere Formel ist um so gewisser genügend, weil $\mathfrak{H}_0$ gegen das genauere $\mathfrak{H}$ etwas zu gross, also die in Rechnung gebrachte spezifische horizontale Schubkraft etwas kleiner wie in der neutralen Achse ist, was mit der Wirklichkeit übereinstimmt.

Auflager. Bei Anordnung der Auflagervorrichtungen und Berechnung der Stabilität der Pfeiler kommen die Maxima der Stützenreaktionen zur Verwendung. Es kann auch nöthig werden, die Minima derselben zu kennen, z. B. bei Widerlagern, wo der Horizontalschub des Erddamms um so ungünstiger wirkt, je kleiner der Vertikaldruck, und dann bei continuirlichen Trägern von geringem Eigengewicht. Bei solchen kann es vorkommen, dass einzelne Reaktionen T negative Werthe annehmen, sodass der Träger an der betreffenden Stelle das Bestreben hat, sich vom Auflager abzuheben, was durch Verankerung zu verhindern wäre.

Um die grössten Momente und Schubkräfte für alle Querschnitte zu finden, hat man nach den in §§ 19., 24., 27., 28. gegebenen Regeln zu verfahren. Dieselben gelten für continuirliche und einfache Träger, für letztere, insoweit sie sich nicht durch das Fortfallen der negativen Momente und Aussenöffnungen von selbst modifiziren.

Bei continuirlichen Trägern ist es meist zweckmässig, Curven der Maximalmomente und Maximalschubkräfte herzustellen (Taf III), wie dies bereits in § 29. auseinandergesetzt wurde. Die Anzahl der Belastungsfälle, welche durchzunehmen, ist abhängig von der Construction, die man ausführen will. Am meisten Fälle sind zu betrachten für ein continuirliches Fachwerk, oder ein Gitterwerk, dessen Stäbe den Maximalschubkräften gemäss variiren sollen. Hier würde etwa die Berechnung in § 49. entsprechen. Bei voller Wandung könnten mindestens die Fälle XII und XIII wegfallen; wollte man ausserdem den Querschnitt auf die ganze Länge des Trägers konstant machen, dann würden I, II, III allein ausreichen, um die grössten Momente über den Stützen und in den Oeffnungen, sowie die grössten Schubkräfte, welche in jeder Oeffnung vorkommen können, zu bestimmen. Dabei hätte man noch alle nöthigen Werthe, um eine Ausgleichung der grössten positiven und negativen Momente durch Senkung von Zwischenstützen vorzunehmen. (§ 50.) Wäre auch dies nicht beabsichtigt, so würde sogar der Belastungsfall II allein genügen. Er liefert über Stütze 2 das absolut grösste Moment am ganzen Träger (Feststellung des konstanten Gurtungsquerschnitts), links und rechts dieser Stütze die grössten vorkommenden Schubkräfte (Stärke der Vertikalplatte und kleinste Niettheilung) und zugleich den grössten Druck auf eine Zwischenstütze.

Bei einfachen Brückenträgern und Rechnung mit stetig vertheilten Lasten treten die grössten Momente in allen Querschnitten für Totalbelastung ein; ebenso die grösstmöglichen Schubkräfte bei den Stützen und demgemäss auch die Maxima der Auflagerreaktionen. Es ist daher zur Berechnung von Blechträgern nur dieser eine Belastungsfall

nöthig, wenn man nicht die Niettheilung gegen die Mitte hin auf Grund der abnehmenden Schubkräfte erweitern will. Man wird dies auch ohne Rechnung können. Besteht die Füllung aus Fach- oder Gitterwerk, so ist auch für einfache Träger eine grössere Anzahl von Belastungsfällen durchzunehmen. Wird die Berechnung für concentrirte Lasten ausgeführt, so ist die ungünstigste Stellung für jeden Querschnitt nach §§ 24., 28. zu beurtheilen.

Die Veränderlichkeit des Querschnitts hat nur insofern Einfluss auf Momente und Schubkräfte am Träger, als sie die Stützenmomente modifizirt. Da beim einfachen Brückenträger keine Stützenmomente vorkommen, so ist die Variation der Querschnitte in der genannten Beziehung ohne Wirkung. Ueber den Einfluss der Veränderlichkeit bei Trägern mit Stützenmomenten geben die §§ 13., 14. Aufschluss und soll noch in § 52. gesprochen werden.

Befürchtet man Aenderungen in der Höhenlage der Stützen, so können unter Annahme vernünftiger Werthe derselben, die entsprechenden Aenderungen der Momente über den Stützen und in den Oeffnungen berechnet werden. Die Zu- oder Abnahme eines bestimmten Stützenmoments M_r durch alle Unregelmässigkeiten in der Höhenlage der Stützen ist bei freier Auflagerung nach 78

78a $$D_r = -6E\Theta \sum_{m=0}^{m=n} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \frac{c_m - c_{m+1}}{l_m}$$

wo die λ dem System der Stütze r zu entnehmen sind. Zur Berechnung ohne λ existiren soviel Gleichungen als Zwischenstützen von der Form:

120 $$D_{r-1}\, l_{r-1} + 2D_r\,(l_{r-1} + l_r) + D_{r+1}\, l_r = -6\,E\Theta\left[\frac{c_{r-1} - c_r}{l_{r-1}} + \frac{c_{r+1} - c_r}{l_r}\right]$$

Nachdem hieraus die Aenderungen D der Pfeilermomente berechnet, hat man nur die modifizirten Pfeilermomente statt der zuerst berechneten in die schon verwendeten Formeln einzusetzen, um auch die Momente und Schubkräfte in allen beliebigen Querschnitten so zu erhalten, wie sie sich bei Eintreten der angenommenen Senkungen ergeben würden. Die Grösse und Wirkung möglicher Aenderungen der relativen Höhenlage der Stützpunkte, die hier allein in Betracht kommt, wird gewöhnlich übertrieben (§ 59.).

Wir geben nun in den folgenden Kapiteln einige Beispiele zur Berechnung continuirlicher Träger, welche in analogen Fällen als Paradigmen dienen können.

§ 49. Berechnung eines continuirlichen Brückenträgers constanten Querschnitts.

Es sollen die grössten Momente und vertikalen Schubkräfte bestimmt werden, welche in allen Querschnitten eines continuirlichen Trägers von 4 Oeffnungen eintreten können. Die Längen sind $l_0 = 52$, $l_1 = 65$, $l_2 = 65$, $l_3 = 52^m$. Vorläufige Ermittelungen ergeben

Eigengewicht pro lauf. Meter $p = 2{,}2$ tn

zufällige Last oder Verkehrslast pro l. M. $z = 4{,}5$ tn

somit grösste Totallast pro l. M. $p + z = q = 6{,}7$ tn

Die Stützpunkte liegen in gleicher Höhe (Senkung in § 50.).

A. Vorbereitung.

Die Stützen erhalten die Indices 0, 1, 2, 3, 4. Der Träger ist symmetrisch zu Stütze 2, alle Rechnungen sind nur für die Oeffnungen l_0, l_1 auszuführen. Nach § 17. hat man

$$\begin{aligned} 2\,M_1\,(l_1 + l_0) + M_2\,l_1 &= R_1 \\ M_1\,l_1 + 2\,M_2\,(l_2 + l_1) + M_3\,l_2 &= R_2 \\ M_2\,l_2 + 2\,M_3\,(l_3 + l_2) &= R_3 \end{aligned}$$

worin die R je nach dem Belastungsfall andre Werthe annehmen (57).

λ-System für Stütze 1.

$234\,\lambda_1 + 65\,\lambda_2 = 1$	$\lambda_1 = \quad \lambda_1$	$\lambda_1 = +\,0{,}004618$
$65\,\lambda_1 + 260\,\lambda_2 + 65\,\lambda_3 = 0$	$\lambda_2 = -\frac{65}{242}\,\lambda_1$	$\lambda_2 = -\,0{,}001240$
$65\,\lambda_2 + 234\,\lambda_3 = 0$	$\lambda_3 = -\frac{65}{234}\,\lambda_2$	$\lambda_3 = +\,0{,}000344$

λ-System für Stütze 2.

$234\,\lambda_1 + 65\,\lambda_2 = 0$	$\lambda_1 = -\frac{65}{234}\,\lambda_2$	$\lambda_1 = -\,0{,}001240$
$65\,\lambda_1 + 260\,\lambda_2 + 65\,\lambda_3 = 1$	$\lambda_2 = \quad \lambda_2$	$\lambda_2 = +\,0{,}004466$
$65\,\lambda_2 + 234\,\lambda_3 = 0$	$\lambda_3 = -\frac{65}{234}\,\lambda_2$	$\lambda_3 = -\,0{,}001240$

Für Stütze 3 ist der Symmetrie halber

$\lambda_1 = +\,0{,}000344$, $\lambda_2 = -\,0{,}001240$, $\lambda_3 = +\,0{,}004618$

und in allen Systemen (§ 17.) $\lambda_0 = 0$, $\lambda_4 = 0$. Nach 69, 72 folgen nun

$$B_0 = -\infty \qquad B_0' = -\,0{,}240$$

$$B_1 = -\frac{234}{65} \qquad B_1' = -\frac{65}{242}$$

und hiermit aus 95, 96 die festen Inflexionspunkte

$$I_0 = 0 \qquad I_0' = 41{,}93^m$$

$$I_1 = 14{,}13^m \qquad I_1' = 51{,}24^m$$

Im Belastungsschema Fig. 41 stellen punktirte Linien eine Belastung durch Eigengewicht allein (p), volle Striche Totalbelastung ($p+z=q$)

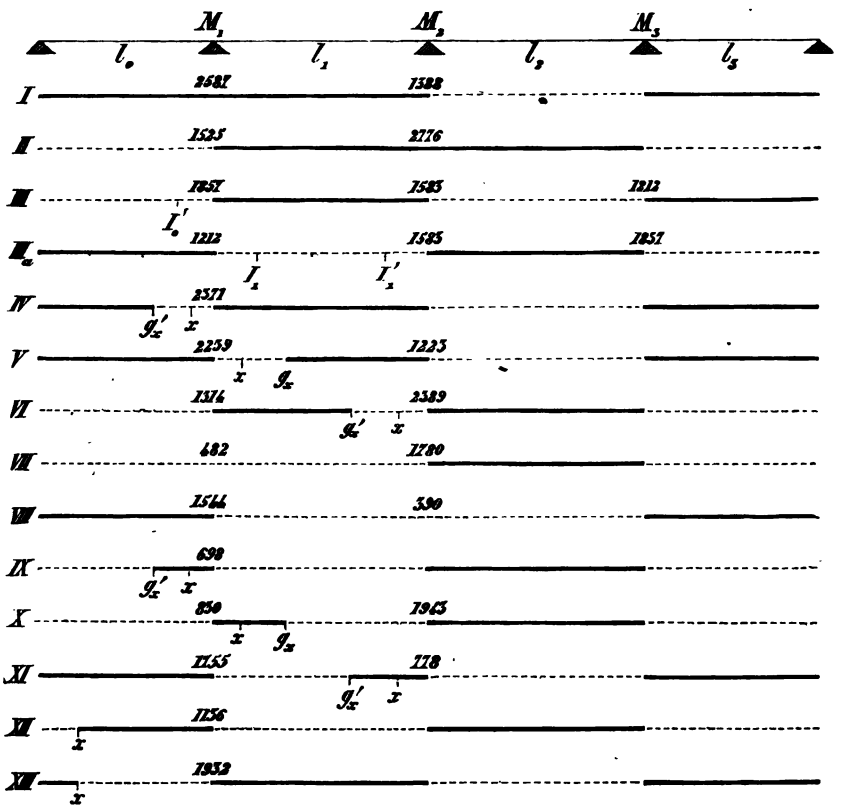
dar, die Maximalmomente und Maximalschubkräfte sind in Taf. III aufgetragen.

B. Maxima der negativen Momente.

Die Belastungsfälle, für welche negative Maxima eintreten, folgen aus § 27.

Belastungsfall I. M_1 erreicht seinen grössten (negativen) Werth. Nach §§. 32., 35. oder nach § 45. ist mit der Bezeichnung 57, p. 35

Fig. 41.



$$R_1 = -\tfrac{1}{4} q\, l_0^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_1^3 = -695515$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{4} q\, l_1^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_2^3 = -611041$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{4} p\, l_2^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_3^3 = -386562$$

max. $M_1 = 0{,}004618\, R_1 - 0{,}001240\, R_2 + 0{,}000344\, R_3 = -2587$ mtn.

$M_2 = -0{,}001240\, R_1 + 0{,}004466\, R_2 - 0{,}001240\, R_3 = -1388$ mtn.

Belastungsfall II. M_2 nimmt seinen grössten (negativen) Werth an.

$$R_1 = -\tfrac{1}{4} p\, l_0^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_1^3 = -537341$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{4} q\, l_1^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_2^3 = -919944$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{4} q\, l_2^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_3^3 = -537341$$

max $M_2 = -0{,}001240\,R_1 + 0{,}004466\,R_2 - 0{,}001240\,R_3 = -2776$ mtn.

$-M_1 = \quad 0{,}004618\,R_1 - 0{,}001240\,R_2 + 0{,}000344\,R_3 = -1525$ mtn.

Belastungsfall III. Negative Maxima von 0 bis I_0' in Oeffnung l_0

$$R_1 = -\tfrac{1}{4}\,p\,l_0^3 - \tfrac{1}{4}\,q\,l_1^3 = -537341^*)$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{4}\,q\,l_1^3 - \tfrac{1}{4}\,p\,l_2^3 = -611041$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{4}\,p\,l_2^3 - \tfrac{1}{4}\,q\,l_3^3 = -386562$$

$M_1 = \quad 0{,}004618\,R_1 - 0{,}001240\,R_2 + 0{,}000344\,R_3 = -1857$ mtn.

$M_2 = -0{,}001240\,R_1 + 0{,}004466\,R_2 - 0{,}001240\,R_3 = -1583$ mtn.

$M_3 = \quad 0{,}000344\,R_1 - 0{,}001240\,R_2 + 0{,}004466\,R_3 = -1212$ mtn.

Die Momentencurve in l_0 für diesen Belastungsfall, welche von o bis I_0' einen Theil der Curve der negativen Maximalmomente darstellt, kann entweder nach Anleitung von § 45. als Parabel construirt werden, oder man berechnet nach der Formel für M_x eine genügende Anzahl Punkte und legt die Curve durch. Es ist

10 $$M_x = M + A\,x - \overset{x}{\Sigma}\,P\,(x-a)$$

und nach Substitution von

9 $$A = \frac{1}{l}\left[M' - M + \overset{l}{\Sigma}\,P\,(l-a)\right]$$

sowie (§ 35.)

$$\overset{x}{\Sigma}\,P\,(x-a) = \tfrac{1}{2}\,p\,x^2, \quad \overset{l}{\Sigma}\,P\,(l-a) = \tfrac{1}{2}\,p\,l^2$$

wird — Bedingung gleichmässige Belastung von o bis l mit p pro Längeneinheit —

121 $$M_x = M\,\frac{l-x}{l} + M'\,\frac{x}{l} + \tfrac{1}{2}\,p\,x\,(l-x)$$

Im vorliegenden Fall folgt mit $M = 0$ (für $x = 0$ $M_x = 0$) und $M' = -1857$ (für $x = l$ $M_x = -1857$) z. B.

für $x = 15$	$M_x = +\ 75$ mtn.
„ $x = 25$	$M_x = -\ 150$ mtn.
„ $x = I_0'$	$M_x = -1033$ mtn.

Die Curve interessirt nur von ihrem Durchschnitt mit der Abscissenachse bis zu I_0'.

Belastungsfall IIIa. Negative Maxima von I_1 bis I_1'. Der Symmetrie halber die Pfeilermomente umgekehrt wie im Fall III, also in 121

$M = -1212$ mtn. $\qquad M' = -1583$ mtn.

Ort des positiven Maximalmoments oder negativen Minimalmoments bei

25 $$V_x = \overset{x}{\Sigma}\,P - A = p\,x - A = 0$$

*) Bei Ableitung der R wiederholen sich vielfach dieselben Zahlen und kann mit Beachtung derselben die Rechnung sehr abgekürzt werden.

und da

$$A = \tfrac{1}{65}\,(-\,1583 + 1212 + \tfrac{1}{2}\,2{,}2\cdot 65^2) = 65{,}8 \text{ tn}$$

$$x = \mu = \frac{65{,}8}{2{,}2} = 29{,}91^m$$

Zur Construction der Momentencurve erhält man aus 121 für

$x = 0$	$M_x = -\,1212$ mtn	$= M$
$x = I_1$	$M_x = -\,502$ „	
$x = 25$	$M_x = -\,255$ „	
$x = \mu$	$M_x = -\,228$ „	
$x = 35$	$M_x = -\,257$ „	
$x = I_1'$	$M_x = -\,728$ „	
$x = l$	$M_x = -\,1583$ „	$= M'$

wobei noch alle Punkte symmetrisch zur Vertikalen durch μ (als Parabelachse) übertragen werden können (§ 45.). Die Curve interessirt nur von I_1 bis I_1' als Theil der Curve der negativen Maximalmomente. Die letztere ist nun bekannt für die Theile des ganzen Trägers, welche zwischen den festen Inflexionspunkten der Oeffnungen liegen. Ferner kennt man die Endpunkte ihres Verlaufs auch für die Strecken zwischen diesen Inflexionspunkten und den Stützen. Hier verläuft die Curve sehr flach und es genügt deshalb, noch je einen Zwischenpunkt zu haben. Wir nehmen in l_0 $x = 46$, in l_1 $x = 8$ und $x = 57$ an. Bestimmt man für diese Querschnitte die Grenzpunkte der positiven und negativen Beitragsstrecken, ganz wie in den Beispielen 13—16 des § 46., so findet sich

in l_0 für	$x = 46^m$	$g_x' = 35{,}14^m$
„ l_1 „	$x = 8^m$	$g_x = 21{,}19^m$
„ l_1 „	$x = 57^m$	$g_x' = 41{,}64^m$

Belastungsfall IV. Negatives Maximum bei $x = 46$ der Oeffnung l_0; $g = g_x' = 35{,}14$. Nach §§ 32., 35. mit der Bezeichnung 57

$$R_1 = -\tfrac{1}{4}\,p\,l_0^3 - \tfrac{1}{4}\,q\,l_1^3 - \tfrac{1}{4}\,\frac{g^2}{l_0}\,z\,(2\,l_0^2 - g^2) = -\,648697$$

$$R_2 = -\tfrac{1}{4}\,q\,l_1^3 - \tfrac{1}{4}\,p\,l_2^3 = -\,611041$$

$$R_3 = -\tfrac{1}{4}\,p\,l_2^3 - \tfrac{1}{4}\,q\,l_3^3 = -\,386562$$

$M_1 = 0{,}004618\,R_1 - 0{,}001240\,R_2 + 0{,}000344\,R_3 = -\,2371$ mtn.

Allgemein

10 $$M_x = M + A\,x - \overset{x}{\Sigma}\,P\,(x - a)$$

worin

9 $$A = \frac{1}{l}\left[M' - M + \overset{l}{\Sigma}\,P\,(l - a)\right]$$

Weil $x > g$ nach § 35.

$$\overset{x}{\Sigma}\,P\,(x - a) = \tfrac{1}{2}\,p\,x^2 + \tfrac{1}{2}\,g\,z\,(2\,x - g)$$

$$\overset{l}{\Sigma} P(l-a) = \tfrac{1}{2} p\, l^2 + \tfrac{1}{2} g\, z\, (2\, l - g)$$

Mit diesen Werthen nach Reduction — Bedingung $x > g$ (wie immer wenn x zwischen I' und l), q von o bis g, p von g bis l —

122 $$M_x = M \frac{l-x}{l} + M' \frac{x}{l} + \tfrac{1}{2}(l-x)\left(p\, x + \frac{g^2}{l} z\right)$$

also für $x = 46$

$$M_x = -2371 \tfrac{46}{52} + \tfrac{1}{2} 6 \left(2{,}2 \cdot 46 + \frac{35{,}14^2}{52} 4{,}5\right) = -1473 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall V. Negatives Maximum bei $x = 8$ der Oeffnung l_1; $g = g_x = 21{,}19$.

$$R_1 = -\tfrac{1}{4} q\, l_0^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_1^3 + \tfrac{1}{4} \frac{g^2}{l_1} z\, (2\, l - g)^2 = -603435$$

$$R_2 = -\tfrac{1}{4} q\, l_1^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_2^3 + \tfrac{1}{4} \frac{g^2}{l_1} z\, (2\, l^2 - g^2) = -548813$$

$$R_3 = -\tfrac{1}{4} p\, l_2^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_3^3 = -386562$$

$$M_1 = 0{,}004618\, R_1 - 0{,}001240\, R_2 + 0{,}000344\, R_3 = -2239 \text{ mtn.}$$

$$M_2 = -0{,}001240\, R_1 + 0{,}004466\, R_2 - 0{,}001240\, R_3 = -1223 \text{ mtn.}$$

Allgemein

10 $$M_x = M + A\, x - \overset{x}{\Sigma} P(x-a)$$

9 $$A = \frac{1}{l}\left[M' - M + \overset{l}{\Sigma} P(l-a)\right]$$

Weil $x < g$ aus § 35.

$$\overset{x}{\Sigma} P(x-a) = \tfrac{1}{2} p\, x^2$$

$$\overset{l}{\Sigma} P(l-a) = \tfrac{1}{2} q\, l^2 - \tfrac{1}{2} g\, z\, (2\, l - g)$$

Mit diesen Werthen nach Reduction — Bedingung $x < g$ (wie immer wenn x zwischen o und I), p von o bis g, q von g bis l —

123 $$M_x = M \frac{l-x}{l} + M' \frac{x}{l} + \tfrac{1}{2} x \left(p\,(l-x) + \frac{(l-g)^2}{l} z\right)$$

also für $x = 8$

$$M_x = -2239 \tfrac{57}{65} - 1223 \tfrac{8}{65} + \tfrac{1}{2} 8 \left(2{,}2 \cdot 57 + \frac{43{,}81^2}{65} 4{,}5\right) = -1020 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall VI. Negatives Maximum bei $x = 57$ der Oeffnung l_1; $g = g_x' = 41{,}64$.

$$R_1 = -\tfrac{1}{4} p\, l_0^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_1^3 - \tfrac{1}{4} \frac{g^2}{l_1} z\, (2\, l_1 - g)^2 = -462691$$

$$R_2 = -\tfrac{1}{4} p\, l_1^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_2^3 - \tfrac{1}{4} \frac{g^2}{l_1} z\, (2\, l_1^2 - g^2) = -812588$$

$$R_3 = -\tfrac{1}{4} q\, l_2^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_3^3 = -537341$$

$$M_1 = 0{,}004618\, R_1 - 0{,}001240\, R_2 + 0{,}000344\, R_3 = -1314 \text{ mtn.}$$

$$M_2 = -0{,}001240\, R_1 + 0{,}004466\, R_2 - 0{,}001240\, R_3 = -2389 \text{ mtn.}$$

Im Querschnitt $x = 57$ ist nach 122

$$M_x = -1314\,\tfrac{8}{65} - 2389\,\tfrac{57}{65} + \tfrac{1}{2}\,8\left(2{,}2{\cdot}57 + \frac{41.64^2}{65}\,4{,}5\right) = -1275\,\text{mtn.}$$

Hiermit ist die Curve der negativen Maximalmomente für den ganzen Träger bestimmt. Dieselbe wurde auf Tafel III nach den erhaltenen Resultaten aufgezeichnet.

C. Maxima der positiven Momente.

Die Belastungsfälle, für welche positive Maxima eintreten, folgen aus § 28.

Belastungsfall IIIa. Positive Maxima von o bis I_0' in Oeffnung l_0. Analog wie im Fall III, Bedingung q von o bis l —

121a
$$M_x = M\,\frac{l-x}{l} + M'\,\frac{x}{l} + \tfrac{1}{2}\,q\,x\,(l-x)$$

$$A = \frac{1}{l}\left[M' - M + \tfrac{1}{2}\,q\,l^2\right]$$

Weil $M = 0,\ M' = -1212$ also

$$A = \tfrac{1}{5}\tfrac{1}{2}\,(-1212 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7{\cdot}52^2) = 150{,}9\text{ tn}$$

so folgt aus

$$V_x = \overset{x}{\Sigma}\,P - A = q\,x - A = 0$$

der Ort des Maximalmoments der Oeffnung l_0

$$x = \mu = \frac{150{,}9}{6{,}7} = 22{,}52^m$$

und als Werth desselben nach

$$M_\mu = +\,1699\text{ mtn.}$$

Der Curventheil innerhalb l_0, welcher symmetrisch zur Vertikalen durch μ liegt, kann entweder als Parabel (§ 45.) oder mittelst einer Anzahl Punkte nach 121a construirt werden. So ist z. B. für $x = I_0'$

$$M_x = -1212\,\tfrac{41{,}9}{52} + \tfrac{1}{2}\,6{,}7{\cdot}41{,}9{\cdot}10{,}1 = +\,437\text{ mtn.}$$

Belastungsfall III. Positive Maxima von I_1 bis I_1'. Aus

$$A = \tfrac{1}{6}\tfrac{1}{5}\,(-1583 + 1857 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7{\cdot}65^2) = 221{,}9\text{ tn}$$ und

$$V_x = 6{,}7\,x - 221{,}9 = 0$$ folgt

$$x = \mu = \frac{221{,}9}{6{,}7} = 33{,}12^m$$

und daselbst ist nach 121a

$$M_\mu = +\,1823\text{ mtn.}$$

Die Momentencurve liegt innerhalb l_1 symmetrisch zu μ und kann als Parabel oder mittelst einer Anzahl Punkte, die nach 121a zu bestimmen sind, gefunden werden. Man erhält z. B. für

$x = I_1$ $\quad M_x = +\,611$ mtn

$x = I_1'$ $\quad M_x = +\,721$ mtn.

Hiermit könnte für die meisten praktischen Fälle die Berechnung

der Momente abgeschlossen werden. Die Dimensionen richten sich nach den absolut grössten Momenten und da es nur selten vorkommt, dass zwischen den Stützen und den festen Inflexionspunkten grössere positive Momente entstehen können als negative, so ist es nicht nöthig, den weitern Verlauf der Curve der positiven Maximalmomente zu kennen. Auch wird an den Stellen der genannten Strecken, wo etwa das grösste positive Moment das grösste negative übertrifft, aus praktischen Gründen der Querschnitt immer grösser sein als das absolut grösste Moment erfordern würde (Taf. IV.). Wir wären also zur Bestimmung der Maximalmomente für alle Querschnitte des Trägers mit 6 Belastungsfällen ausgekommen. Soll aber noch die Curve der positiven Maximalmomente vollständig bestimmt werden, wie wir es hier thun wollen, so sind 5 weitere Fälle nöthig, die indess auch bei Bestimmung der Maxima der vertikalen Schubkräfte zur Verwendung kommen.

Von den Theilen der Curve der positiven Maximalmomente, welche zwischen den festen Influenzpunkten und den Stützen liegen, ist nur bekannt je ein Punkt, das Moment beim Inflexionspunkte selbst. Wir bestimmen noch die Endpunkte über den Stützen und je einen Zwischenpunkt.

Belastungsfall VII. M_1 erreicht seinen grössten positiven oder kleinsten negativen Werth.

$$R_1 = -\tfrac{1}{4} p\, l_0^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_1^3 = -228388$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{4} p\, l_1^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_2^3 = -611041$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{4} q\, l_2^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_3^3 = -537341$$

$$\min M_1 = 0{,}004618\, R_1 - 0{,}001240\, R_2 + 0{,}000344\, R_3 = -482 \text{ mtn.}$$
$$M_2 = -0{,}001240\, R_1 + 0{,}004466\, R_2 - 0{,}001240\, R_3 = -1780 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall VIII. M_2 ein positives Maximum oder negatives Minimum.

$$R_1 = -\tfrac{1}{4} q\, l_0^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_1^3 = -386562$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{4} p\, l_1^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_2^3 = -302088$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{4} p\, l_2^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_3^3 = -386562$$

$$\min M_2 = -0{,}001240\, R_1 + 0{,}004466\, R_2 - 0{,}001240\, R_3 = -390 \text{ mtn.}$$
$$M_1 = 0{,}004618\, R_1 - 0{,}001240\, R_2 + 0{,}000344\, R_3 = -1544 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall IX. Positives Maximum oder negatives Minimum bei $x = 46$ der Oeffnung l_0; $g = g'_x = 35{,}14$.

$$R_1 = -\tfrac{1}{4} q\, l_0^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_1^3 + \tfrac{1}{4} \frac{g^2}{l_0} z\, (2\, l_0^2 - g^2) = -275206$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{4} p\, l_1^3 - \tfrac{1}{4} q\, l_2^3 = -611041$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{4} q\, l_2^3 - \tfrac{1}{4} p\, l_3^3 = -537341$$

$$M_1 = 0{,}004618\, R_1 - 0{,}001240\, R_2 + 0{,}000344\, R_3 = -698 \text{ mtn.}$$

Vertauscht man, der Belastung entsprechend, in 122 p und q, sodass

also auch $-z$ an Stelle von z tritt, dann wird — Bedingung $x > g$, p von o bis g, q von g bis l —

122a $$M_x = M\frac{l-x}{l} + M'\frac{x}{l} + \tfrac{1}{2}(l-x)\left(q\,x - \frac{g^2}{l}z\right)$$

und hieraus für $x = 46$

$$M_x = -13 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall X. Positives Maximum oder negatives Minimum bei $x = 8$ der Oeffnung l_1; $g = g_x = 21{,}19$.

$$R_1 = -\tfrac{1}{4}p\,l_0^3 - \tfrac{1}{4}p\,l_1^3 - \tfrac{1}{4}\frac{g^2}{l_1}z\,(2\,l_1 - g)^2 = -320468$$

$$R_2 = -\tfrac{1}{4}p\,l_1^3 - \tfrac{1}{4}q\,l_2^3 = -673269$$

$$R_3 = -\tfrac{1}{4}q\,l_2^3 - \tfrac{1}{4}p\,l_3^3 = -537341$$

$$M_1 = 0{,}004618\,R_1 - 0{,}001240\,R_2 + 0{,}000344\,R_3 = -830 \text{ mtn.}$$

$$M_2 = -0{,}001240\,R_1 + 0{,}004466\,R_2 - 0{,}001240\,R_3 = -1943 \text{ mtn.}$$

Vertauscht man, der Belastung entsprechend, in 123 p und q, sodass also auch $-z$ an Stelle von z tritt, so folgt — Bedingung $x < g$, q von o bis g, p von g bis l —

123a $$M_x = M\frac{l-x}{l} + M'\frac{x}{l} + \tfrac{1}{2}x\left(q\,(l-x) - \frac{(l-g)^2}{l}z\right)$$

und hieraus für $x = 8$

$$M_x = -32 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall XI. Positives Maximum oder negatives Minimum bei $x = 57$ der Oeffnung l_1; $g = g_x' = 41{,}64$.

$$R_1 = -\tfrac{1}{4}q\,l_0^3 - \tfrac{1}{4}q\,l_1^3 + \tfrac{1}{4}\frac{g^2}{l_1}z\,(2\,l_1 - g)^2 = -461212$$

$$R_2 = -\tfrac{1}{4}q\,l_1^3 - \tfrac{1}{4}p\,l_2^3 + \tfrac{1}{4}\frac{g^2}{l_1}z\,(2\,l_1^2 - g^2) = -409494$$

$$R_3 = -\tfrac{1}{4}p\,l_2^3 - \tfrac{1}{4}q\,l_3^3 = -386562$$

$$M_1 = 0{,}004618\,R_1 - 0{,}001240\,R_2 + 0{,}000344\,R_3 = -1755 \text{ mtn.}$$

$$M_2 = -0{,}001240\,R_1 + 0{,}004466\,R_2 - 0{,}001240\,R_3 = -778 \text{ mtn.}$$

Für $x = 57$ wird nach Formel 122a

$$M_x = +149 \text{ mtn.}$$

Der Verlauf der Curven der Maximalmomente in l_2 und l_3 ist in Bezug auf Stütze 2 genau symmetrisch zu den Curven in l_1 und l_0; sonach ist nun für jeden Querschnitt des ganzen Trägers bekannt, ob positive oder negative Momente daselbst vorkommen und welche grössten Werthe sie annehmen können.

D. Maxima der vertikalen Schubkräfte.

Es sind die Curven der negativen und die der positiven Maxima der vertikalen Schubkräfte für die Oeffnungen l_0 und l_1 herzustellen. Diese Curven verlaufen immer sehr flach und es genügt vollständig,

wenn ausser den Endpunkten bei den Stützen noch 2 Zwischenpunkte innerhalb jeder Oeffnung bekannt sind. Diese Zwischenpunkte wird man natürlich so wählen, dass möglichst wenig Rechnung nöthig ist. Da wir nun bereits die Pfeilermomente für diejenigen Belastungsfälle kennen, bei welchen im Querschnitt $x = 35{,}14$ der Oeffnung l_0 und in den Querschnitten $x = 21{,}19$ und $x = 41{,}64$ der Oeffnung l_1 die grössten positiven und negativen Schubkräfte eintreten (§ 24.), so soll von diesen 3 Punkten Gebrauch gemacht werden. Für Oeffnung l_0 ist dann noch ein weiterer Punkt nöthig, wir nehmen ihn bei $x = 12$ an.

Es werden also berechnet die Maxima der vertikalen Schubkräfte für 4 Punkte jeder Oeffnung und zwar

in l_0 für $x = 0$, $x = 12$, $x = 35{,}1$, $x = l$;

in l_1 für $x = 0$, $x = 21{,}2$, $x = 41{,}6$, $x = l$.

Zur Bestimmung der Maxima der vertikalen Schubkräfte bei $x = 12$ müssen 2 weitere Belastungsfälle angenommen werden.

Belastungsfall XII. In gleicher Weise wie im Fall IX mit $g = x = 12$

$$R_1 = -\tfrac{1}{4} q l_0^3 - \tfrac{1}{4} p l_1^3 + \tfrac{g^2}{l_0} z (2 l_0^2 - g^2) = -370163$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{4} p l_1^3 - \tfrac{1}{4} q l_2^3 = -611041$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{4} q l_2^3 - \tfrac{1}{4} p l_3^3 = -537341$$
$$M_1 = 0{,}004618\, R_1 - 0{,}001240\, R_2 + 0{,}000344\, R_3 = -1136 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall XIII. In gleicher Weise wie im Fall IV mit $g = x = 12$

$$R_1 = -\tfrac{1}{4} p l_0^3 - \tfrac{1}{4} q l_1^3 - \tfrac{1}{4} \tfrac{g^2}{l_0} z (2 l_0^2 - g^2) = -553680$$
$$R_2 = -\tfrac{1}{4} q l_1^3 - \tfrac{1}{4} p l_2^3 = -611041$$
$$R_3 = -\tfrac{1}{4} p l_2^3 - \tfrac{1}{4} q l_3^3 = -386562$$
$$M_1 = 0{,}004618\, R_1 - 0{,}001240\, R_2 + 0{,}000344\, R_3 = -1932 \text{ mtn.}$$

Die allgemeinen Formeln zur Bestimmung der vertikalen Schubkräfte lauten

20 $$V_0 = -A = \frac{1}{l}\left[M - M' - \sum^{i} P (l - a)\right]$$

21 $$V_i = A' = \frac{1}{l}\left[M - M' + \sum^{i} P a\right]$$

7 $$V_x = \sum^{i} P + \frac{1}{l}\left[M - M' + \sum^{i} P (l - a)\right]$$

Die Werthe der Summenausdrücke für jeden Belastungsfall folgen aus § 35.

Negative Maxima in l_0.

Für $x = 0$, Belastungsfall IIIa, in 20

$$\sum^{i} P (l - a) = \tfrac{1}{2} q l^2$$

$$V_0 = \tfrac{1}{52}\,(1212 - \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 52^2) \qquad = -\ 151 \text{ tn.}$$

Für $x = 12$, Belastungsfall XII, in 7

$$\overset{x}{\Sigma}\, P \qquad = p\,x$$

$$\overset{l}{\Sigma}\, P\,(l - a) = \tfrac{1}{2}\,q\,l^2 - \tfrac{1}{2}\,x\,z\,(2\,l - x)$$

nach Substitution und Reduction folgt — Bedingung p von o bis x, q von x bis l —

124 $$V_x = \frac{1}{l}\,(M - M' - \tfrac{1}{2}\,x^2\,s) + q\,(x - \tfrac{1}{2}\,l)$$

also im vorliegenden Fall

$$V_x = \tfrac{1}{52}\,(1136 - \tfrac{1}{2}\,12^2\,4{,}5) - 6{,}7 \cdot 14 = -\ 78 \text{ tn.}$$

Für $x = 35{,}1$, Belastungsfall IX, nach 124

$$V_x = \tfrac{1}{52}\,(698 - \tfrac{1}{2}\,35{,}1^2 \cdot 4{,}5) + 6{,}7 \cdot 9{,}1 = +\ 21 \text{ tn.}$$

Für $x = l$, Belastungsfall VII, in 21

$$\overset{l}{\Sigma}\, P\,a = \tfrac{1}{2}\,p\,l^2$$

$$V_l = \tfrac{1}{52}\,(482 + \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 52^2) = +\ 66 \text{ tn.}$$

Positive Maxima in l_0.

Für $x = l$, Belastungsfall I, in 21

$$\overset{l}{\Sigma}\, P\,a = \tfrac{1}{2}\,q\,l^2$$

$$V_l = \tfrac{1}{52}\,(2587 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 52^2) = +\ 224 \text{ tn.}$$

Für $x = 35{,}1$, Belastungsfall IV, in 7

$$\overset{x}{\Sigma}\, P = q\,x$$

$$\overset{l}{\Sigma}\, P\,(l - a) = \tfrac{1}{2}\,p\,l^2 + \tfrac{1}{2}\,x\,z\,(2\,l - x)$$

hiermit folgt — Bedingung q von o bis x, p von x bis l —

124a $$V_x = \frac{1}{l}\,(M - M' + \tfrac{1}{2}\,x^2\,z) + p\,(x - \tfrac{1}{2}\,l)$$

und im vorliegenden Fall

$$V_x = \tfrac{1}{52}\,(2371 + \tfrac{1}{2}\,35{,}1^2 \cdot 4{,}5) + 2{,}2 \cdot 9{,}1 = +\ 119 \text{ tn.}$$

Für $x = 12$, Belastungsfall XIII, nach 124a

$$V_x = \tfrac{1}{52}\,(1932 + \tfrac{1}{2}\,12^2 \cdot 4{,}5) - 2{,}2 \cdot 14 = +\ 13 \text{ tn.}$$

Für $x = 0$, Belastungsfall III, in 20

$$\overset{l}{\Sigma}\, P\,(l - a) = \tfrac{1}{2}\,p\,l^2$$

$$V_0 = \tfrac{1}{52}\,(1857 - \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 52^2) = -\ 21 \text{ tn.}$$

Negative Maxima in l_1.

Für $x = 0$, Belastungsfall I, in 20

$$\overset{l}{\Sigma}\, P\,(l - a) = \tfrac{1}{2}\,q\,l^2$$

$$V_0 = \tfrac{1}{65}\,(-\ 2587 + 1388 - \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 65^2) = -\ 236 \text{ tn.}$$

Für $x = 21{,}2$, Belastungsfall V, nach 124

$$V_x = \tfrac{1}{65}(-2239 + 1223 - \tfrac{1}{2}\,21{,}2^2 \cdot 4{,}5) - 6{,}7 \cdot 11{,}3 = -107 \text{ tn.}$$

Für $x = 41{,}6$, Belastungsfall XI, nach 124

$$V_x = \tfrac{1}{65}(-1755 + 778 - \tfrac{1}{2}\,41{,}6^2 \cdot 4{,}5) + 6{,}7 \cdot 9{,}1 = -14 \text{ tn.}$$

Für $x = l$, Belastungsfall VIII, in 21

$$\overset{i}{\Sigma}\, P\, a = \tfrac{1}{2}\, p\, l^2$$

$$V_l = \tfrac{1}{65}(-1544 + 390 + \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 65^2) = +54 \text{ tn.}$$

Positive Maxima in l_1.

Für $x = l$, Belastungsfall II, in 21

$$\overset{i}{\Sigma}\, P\, a = \tfrac{1}{2}\, q\, l^2$$

$$V_l = \tfrac{1}{65}(-1525 + 2776 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 65^2) = +237 \text{ tn.}$$

Für $x = 41{,}6$, Belastungsfall VI, nach 124a

$$V_x = \tfrac{1}{65}(-1314 + 2389 + \tfrac{1}{2}\,41{,}6^2 \cdot 4{,}5) + 2{,}2 \cdot 9{,}1 = +97 \text{ tn.}$$

Für $x = 21{,}2$, Belastungsfall X, nach 124a

$$V_x = \tfrac{1}{65}(-830 + 1943 + \tfrac{1}{2}\,21{,}2^2 \cdot 4{,}5) - 2{,}2 \cdot 11{,}3 = +8 \text{ tn.}$$

Für $x = 0$, Belastungsfall VII, in 20

$$\overset{i}{\Sigma}\, P\,(l - a) = \tfrac{1}{2}\, p\, l^2$$

$$V_0 = \tfrac{1}{65}(-482 + 1780 - \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 65^2) = -51 \text{ tn.}$$

Auch in Bezug auf die Maximalwerthe der vertikalen Schubkräfte ist Stütze 2 Symmetriemittelpunkt; jedoch haben nach unsrer im § 15. begründeten Darstellung entsprechende Werthe verschiedene Vorzeichen.

Durch die Curven der positiven und der negativen Maximalschubkräfte ist für jeden Querschnitt des ganzen Trägers bekannt, ob in ihm die vertikale Schubkraft immer in gleichem Sinne wirkt oder ob sie auch entgegengesetzte Richtung haben kann und welche grössten Werthe diese Kräfte in den ungünstigsten Belastungsfällen erreichen können.

Mit den Maximalwerthen der vertikalen Schubkräfte sind auch nach den Formeln der §§ 9., 10. od. 48. die Maxima der horizontalen Schubkräfte und schiefen Spannungen für alle Querschnitte x und für jede Entfernung η von der neutralen Schicht bestimmt.

E. Maxima und Minima der Stützenreactionen.

Nach § 24. nehmen die Reactionen ihre grössten Werthe an für

Stütze 0 im Belastungsfall IIIa
„ 1 „ „ I
„ 2 „ „ II

Allgemein ist Reaction der Stütze r

24 $T_r = A'_{r-1} + A_r$

Es wurde gefunden

im Belastungsfall IIIa $A_0 = 151$ tn
„ „ I $A_0' = 224$ tn
„ „ I $A_1 = 236$ tn
„ „ II $A_1' = 237$ tn
„ „ II $A_2 = 237$ tn

wir erhalten daher als Maxima

$$T_0 = A_0 = 151 \text{ tn}$$
$$T_1 = A_0' + A_1 = 460 \text{ tn}$$
$$T_2 = A_1' + A_2 = 474 \text{ tn}$$

und der Symmetrie halber

$$T_3 = 460 \text{ tn}, \quad T_4 = 151 \text{ tn}.$$

Die kleinsten Stützenreactionen treten ein (§ 24.) für

Stütze 0 im Belastungsfall III
„ 1 „ „ VII
„ 2 „ „ VIII

und es ergeben sich als Minima

$$T_0 = 21 \text{ tn}$$
$$T_1 = 66 + 51 = 117 \text{ tn}$$
$$T_2 = 54 + 54 = 108 \text{ tn}$$

ferner der Symmetrie halber

$$T_3 = 137 \text{ tn}, \quad T_4 = 21 \text{ tn}.$$

Hiermit ist die Berechnung des Trägers, soweit unabhängig von dem anzuwendenden System, vollendet.

Die meisten Ingenieure und Theoretiker stellen die Curve der negativen Maximalmomente einfach dadurch her, dass sie diejenigen Curven bis zu den gegenseitigen Schnittpunkten auftragen, welche die grössten negativen Momente in den Oeffnungen (von I bis I') und über den Stützen enthalten. Man begeht hierbei einen Fehler, dessen Werth 0 für festen Inflexionspunkt und Stütze, und der sein Maximum annimmt in etwa $^1/_3$ ihrer Entfernung vom Inflexionspunkt gegen die Stütze hin. In unserm Beispiel würde dieser Fehler zwischen I_1' und Stütze 2 circa 17% erreicht haben.

Bei $x = 46$ der Oeffnung l_0, wo der Belastungsfall IV

$$M_x = -1473 \text{ mtn}$$

ergiebt, hätte man erhalten im Belastungsfall I (M_1 ein Maximum)

$$M_x = -1364 \text{ mtn}$$

und im Fall III (negative Maxima von o bis I_0')

$$M_x = -1339 \text{ mtn}.$$

Bsi $x = 8$ der Oeffnung l_1 ergiebt der Belastungsfall V

$$M_x = -1020 \text{ mtn}$$

mit Fall I (Maximum von M_1) würde

$$M_x = -911 \text{ mtn}$$

und mit IIIa (negative Maxima von I_1 bis I_1')

$$M_x = -756 \text{ mtn.}$$

Bei $x = 57$ der Oeffnung l_1 wird mit Belastungsfall VI

$$M_x = -1275 \text{ mtn}$$

es würde mit Fall II (Maximum von M_2)

$$M_x = -1094 \text{ mtn}$$

und mit IIIa (negative Maxima von I_1 bis I_1')

$$M_x = -1036 \text{ mtn.}$$

Auch die Curve der positiven Maximalmomente verläuft zwischen Inflexionspunkten und Stützen anders als sie gewöhnlich dargestellt wird; doch da hier fast stets die absoluten Werthe der negativen Maxima überwiegen, so ist dies von keinem Einfluss auf die Dimensionenbestimmung.

Nach der Definition der festen Inflexionspunkte (§ 23.) muss sich z. B. für den Querschnitt I_1 bei der Belastung II dasselbe Moment ergeben wie im Belastungsfall III. In der That erhält man mit II nach Formel 121a'

$$M_x = -1525 \frac{50{,}87}{65} - 2776 \frac{14{,}13}{65} + \tfrac{1}{2} 6{,}7 \cdot 14{,}13 \cdot 50{,}87 = 611 \text{ mtn.}$$

wie oben für III gefunden wurde. Gleicher Weise können Proben bei den andern Inflexionspunkten gemacht werden.

§ 50. Momentenausgleichung durch Aenderung der Stützhöhen.

Ein continuirlicher Träger ist nach den für Träger mit gleichhohen Stützpunkten geltenden Formeln soweit berechnet, dass man die grössten Werthe der negativen Mömente über den Pfeilern, sowie die grössten positiven Momente innerhalb der Oeffnungen kennt. Es kann sich nun darum handeln, die erhaltenen Werthe in irgend einer Weise zu modifiziren. Das Mittel bietet eine Veränderung der Höhenlage der Stützpunkte (§§ 20., 37.). Die Aufstellung der nöthigen Gleichungen richtet sich nach den Resultaten, welche man erreichen will und nach der Anzahl und Anordnung der Oeffnungen.

Wir wollen 2 Verfahren angeben, eins mit eins ohne λ-System. Das erste ist allgemeiner anwendbar, das zweite führt bei kleiner Oeffnungszahl und symmetrischer Anordnung schneller zum Ziel. Beide sollen auf den Träger von § 49. angewendet werden.

Erstes Verfahren. Man hat als Einfluss aller Unregelmässigkeiten in der Höhenlage der Stützpunkte auf ein bestimmtes Stützenmoment M_r bei freier Auflagerung (§§ 20., 48.)

78a $$D_r = -6 E \Theta \sum_{m=0}^{m=n} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \frac{c_m - c_{m+1}}{l_m}$$

wo sämmtliche λ dem System der Stütze r zu entnehmen sind. Dieser Beitrag ist constant für jede Belastungsart und für alle Belastungsfälle. Wir stellen nun als erste Bedingung an unsern Träger

1) dass max M_1 = max M_2 = max M_3 werde.

In § 49. wurde max $M_1 = \max M_3 = -2587$ und max $M_2 = 2776$ gefunden, sodass die Bedingung lautet

$$2587 + 6E\Theta \sum_{m=0}^{m=n} (\lambda_{m+1} - \lambda_m) \frac{c_m - c_{m+1}}{l_m} = 2776 + 6E\Theta \sum_{m=0}^{m=n} (\lambda'_{m+1} - \lambda'_m) \frac{c_m - c_{m+1}}{l_m}$$

wo die λ dem System der Stütze 1, die λ' dem System der Stütze 2 angehören. Setzen wir der Kürze halber allgemein

$$c_{m+1} - c_m = d_m$$

und substituiren die λ, so folgt

$$2587 + 6\,E\Theta\left[-0{,}004618\,\frac{d_0}{l_0} + (0{,}001240 + 0{,}004618)\,\frac{d_1}{l_1} - (0{,}000344 + 0{,}001240)\,\frac{d_2}{l_2} + 0{,}000344\,\frac{d_3}{l_3}\right] =$$

$$2776 + 6\,E\Theta\left[+0{,}001240\,\frac{d_0}{l_0} - (0{,}004466 + 0{,}001240)\,\frac{d_1}{l_1} + (0{,}001240 + 0{,}004466)\,\frac{d_2}{l_2} - 0{,}001240\,\frac{d_3}{l_3}\right]$$

Im vorliegenden Fall ist wegen der Symmetrie der Form und Momente

$$\frac{d_2}{l_2} = -\frac{d_1}{l_1}, \qquad \frac{d_3}{l_3} = -\frac{d_0}{l_0}$$ sodass

$$2587 + 6\,E\Theta\left[0{,}007442\,\frac{d_1}{l_1} - 0{,}004962\,\frac{d_0}{l_0}\right] = 2776 + 6\,E\Theta\left[0{,}002480\,\frac{d_0}{l_0} - 0{,}011412\,\frac{d_1}{l_1}\right]$$

Weil hier nur eine Gleichung für 2 Unbekannte d_0, d_1 vorhanden, so kann noch eine weitere Bedingung gestellt werden und wir verlangen

2) dass das grösste positive Moment, welches am Träger vorkommen kann, den grössten Pfeilermomenten nummerisch gleich werde.

Das grösste positive Moment tritt in l_1 im Belastungsfall III ein. Bei der neuen Höhenlage der Stützpunkte ist dann

$$M_1 = -1857 - 6\,E\Theta\left[0{,}007442\,\frac{d_1}{l_1} - 0{,}004962\,\frac{d_0}{l_0}\right]$$

$$M_2 = -1583 - 6\,E\Theta\left[0{,}002480\,\frac{d_0}{l_0} - 0{,}011412\,\frac{d_1}{l_1}\right]$$

In der Mitte von l_1 ist nach 121a

$$M_x = \tfrac{1}{2}(M_1 + M_2) + \tfrac{1}{8}\,q\,l_1^2$$

Diesen Werth kann man deshalb fürs grösste positive Moment annehmen, weil die Momentencurve bei der Mitte fast horizontal verläuft. Es wird nun durch Substitution von M_1, M_2, q, l

$$M_x = 1818 + 6\,E\Theta\left[0{,}001241\,\frac{d_0}{l_0} + 0{,}001985\,\frac{d_1}{l_1}\right]$$

und die zweite Bedingung lautet

$$2587 + 6\,E\,\Theta\left[0{,}007442\,\frac{d_1}{l_1} - 0{,}004962\,\frac{d_0}{l_0}\right]$$
$$= 1818 + 6\,E\,\Theta\left[0{,}001241\,\frac{d_0}{l_0} + 0{,}001985\,\frac{d_1}{l_1}\right]$$

Nach weiterer Zusammenziehung gehen die beiden Bedingungsgleichungen über in

$$189 + 6\,E\,\Theta\left[0{,}007442\,\frac{d_0}{l_0} - 0{,}018854\,\frac{d_1}{l_1}\right] = 0$$
$$789 + 6\,E\,\Theta\left[0{,}005457\,\frac{d_1}{l_1} - 0{,}006203\,\frac{d_0}{l_0}\right] = 0$$

woraus auf gewöhnlichem Wege

$$\frac{d_0}{l_0} = \frac{203635}{6\,E\,\Theta}$$
$$\frac{d_1}{l_1} = \frac{90409}{6\,E\,\Theta}$$

und hiermit ist die Aufgabe gelöst. Man hat E pro Quadratmeter und Θ mit Meter und Quadratmeter als Längen- und Quadrateinheit berechnet einzusetzen.

Durch die veränderte Höhenlage der Stützen werden die Momente M_1, M_2 für alle Belastungsarten geändert um

$$D_1 = -6\,E\,\Theta\left[\frac{0{,}007442 \cdot 90409}{6\,E\,\Theta} - \frac{0{,}004962 \cdot 203635}{6\,E\,\Theta}\right] = +337 \text{ mtn.}$$

$$D_2 = -6\,E\,\Theta\left[\frac{0{,}002480 \cdot 203635}{6\,E\,\Theta} - \frac{0{,}011412 \cdot 90409}{6\,E\,\Theta}\right] = +526 \text{ mtn.}$$

sodass ihre neuen Maximalwerthe

$$\max M_1 = -2587 + 337 = -2250 \text{ mtn.}$$
$$\max M_2 = -2776 + 526 = -2250 \text{ mtn.}$$

Im Belastungsfall III, der die grössten positiven Momente von I_1 bis I_1' liefert, wird

$$M_1 = -1857 + 337 = -1520$$
$$M_2 = -1583 + 526 = -1057$$

und das Moment in der Mitte von l_1

$$M_x = -\tfrac{1}{2}(1520 + 1057) + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 6{,}5^2 = +2250 \text{ mtn.}$$

Zweites Verfahren. Wenn die Stützpunkte nicht in gleicher Höhe liegen, so erleiden die Pfeilermomente Aenderungen, die für 3 auf einanderfolgende Stützen in folgender, allgemein gültigen Relation stehen

120
$$D_{r-1}\,l_{r-1} + 2\,D_r\,(l_{r-1} + l_r) + D_{r+1}\,l_r$$
$$= -6\,E\Theta\left[\frac{c_{r-1} - c_r}{l_{r-1}} + \frac{c_{r+1} - c_r}{l_r}\right]$$

Am Träger des § 49. gelten also, was für Aenderungen der Momente wir auch verlangen mögen, die Gleichungen

$$D_0 l_0 + 2 D_1 (l_0 + l_1) + D_2 l_1 = - 6 E \Theta \left[\frac{c_0 - c_1}{l_0} + \frac{c_2 - c_1}{l_1}\right]$$

$$D_1 l_1 + 2 D_2 (l_1 + l_2) + D_3 l_2 = - 6 E \Theta \left[\frac{c_1 - c_2}{l_1} + \frac{c_3 - c_2}{l_2}\right]$$

Die Ausgleichung der Momente soll unter den gleichen Bedingungen geschehen wie beim ersten Verfahren. Es ist $D_0 = 0$; wenn

$$c_1 - c_0 = d_0, \qquad c_2 - c_1 = d_1$$

gesetzt wird, und weil der Symmetrie halber

$$l_2 = l_1, \qquad D_3 = D_1, \qquad c_3 - c_2 = - (c_2 - c_1) = - d_1$$

so ergiebt sich

$$2 D_1 (l_0 + l_1) + D_2 l_1 = 6 E \Theta \left[\frac{d_0}{l_0} - \frac{d_1}{l_1}\right]$$

$$2 D_1 l_1 + 4 D_2 l_1 = 6 E \Theta \frac{2 d_1}{l_1}$$

$$\frac{d_1}{l_1} = \frac{l_1 (D_1 + 2 D_2)}{6 E \Theta}$$

$$\frac{d_0}{l_0} = \frac{3 l_1 (D_1 + D_2) + 2 l_0 D_1}{6 E \Theta}$$

Wird wieder als grösstes positives Moment am Träger, das Moment in der Mitte von l_1 genommen, welches im Belastungsfall III eintritt (siehe erstes Verfahren) so lauten die Bedingungen für den Ausgleich der Momente

$$- 2587 + D_1 = - 2776 + D_2$$

$$+ 2587 - D_1 = + 1818 + \tfrac{1}{2} (D_1 + D_2)$$

$$D_1 = + 337 \text{ mtn}$$

$$D_2 = + 526 \text{ mtn}$$

Mit diesen Werthen erhält man wie oben

$$\max M_1 = - 2587 + 337 = - 2250 \text{ mtn}$$

$$\max M_2 = - 2776 + 526 = - 2250 \text{ mtn}$$

$$M_x = 1818 + \tfrac{1}{2} (337 + 526) = + 2250 \text{ mtn}$$

Die hierzu nöthigen Höhendifferenzen der Stützpunkte folgen aus den vorgedruckten Werthen von $\frac{d_1}{l_1}$, $\frac{d_0}{l_0}$, wobei auf der rechten Seite entweder Alles nach Metern und Tonnen oder aber nach Centimetern und Kilogrammen gerechnet werden kann.

Wir haben nun also erreicht, dass die grössten Momente, welche über allen 3 Stützen und in den 2 mittlern Oeffnungen bei den resp. ungünstigsten Belastungen entstehen können, numerisch von gleichem Werthe sind, und dass der absolute Maximalwerth aller Momente von 2776 auf 2250 gesunken ist. Letzteres ist der kleinste erreichbare

absolute Maximalwerth; denn heben wir die Zwischenstützen, so wachsen die Pfeilermomente über 2250 hinaus, senken wir, so tritt dasselbe mit den Momenten in Mitte von l_1, l_2 ein.

Wird ein ganzer Träger gleichmässig stark construirt, so muss der Querschnitt dem absoluten grössten Momente, welches überhaupt vorkommen kann, angepasst werden. Alsdann erlangt man durch Senkung der Zwischenstützen sehr bedeutenden Vortheil. Im obigen Fall würde bei Unterlassung der Senkung der Materialverbrauch für die Gurtungen 23% mehr betragen.

Anders ist es, wenn die Querschnitte mit dem Abnehmen der Momente variiren. In Bezug auf Materialverbrauch kann dann die Senkung sogar nachtheilig wirken. Wird in analoger Weise wie oben gesenkt, so braucht man über den Stützen weniger, in den Mitten mehr Material als bei gleichen Stützhöhen. Aber die Strecke, auf welcher Material zugesetzt wird, ist grösser als diejenige, auf welcher Materialersparniss eintritt. Jedenfalls ist bei veränderlichem Querschnitt gleiche Höhenlage der Stützen vorzuziehen.

Weitere Beispiele von Momentenausgleichung §§ 53., 46., über den Einfluss unfreiwilliger Senkungen in § 48.

In obigem Beispiel ist bei der neuen Höhenlage der Stützen im Belastungsschema (Fig. 41.) das Moment M_2 für alle Belastungsfälle um 526, die Momente M_1, M_3 um 337 mtn zu verkleinern, sodass also im Belastungsfall VIII über Stütze 2 ein positives Moment von 136 mtn entsteht. Alle Momente zwischen den Stützen, sowie die Schubkräfte erleiden ebenfalls Veränderungen. So ist z. B. jetzt das grösstmögliche positive Moment in l_0, Belastungsfall IIIa, mit

$$M_1 = -1212 + 337 = -875 \quad \text{und}$$

$$A = \tfrac{1}{52}(-875 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 52^2) = 157{,}3 \quad \text{bei}$$

$$\mu = \frac{157{,}3}{6{,}7} = 23{,}5^m$$

$$M_\mu = -875\,\frac{23{,}5}{52} + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 23{,}5 \cdot 28{,}5 = +1848 \text{ mtn}$$

anstatt 1699 bei 22,5.

Das grösste Moment in l_1, welches wir oben in der Mitte angenommen haben, liegt wie aus

$$A = \tfrac{1}{65}(-1057 + 1520 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 65^2) = 224{,}7$$

folgt, in Wirklichkeit bei

$$\mu = \frac{224{,}7}{6{,}7} = 33{,}5^m$$

und beträgt

$$M_\mu = -1520\,\frac{31{,}5}{65} - 1057\,\frac{33{,}5}{65} + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 31{,}5 \cdot 33{,}5 = +2254 \text{ mtn}$$

also nur 4 tn mehr als in Rechnung gebracht wurde.

§ 51. Berechnung eines continuirlichen Brückenträgers sprungweise veränderlichen Querschnitts.

Nachdem der in § 49. angenommene Träger mittelst der Formeln für konstanten Querschnitt berechnet war, wurde auf Taf. IV. die Curve der absoluten Maximlmomente im Massstab $15^{mm} = 1000$ mtn aufgetragen. Die konstant angenommene Entfernung der Mittel-

punkte von Zug und Druck (§ 9.) sei $\mathfrak{H} = 5^m$, dann können, gemäss der Formel

32 $$M = Q\mathfrak{H}$$

die Maximalbeanspruchungen der Gurtungen abgegriffen werden. Für jeden Querschnitt stellt die dortige Ordinate der Curve der absoluten Maximalmomente diese Beanspruchung im Massstab $15^{mm} = 200$ tn dar.

Die Querschnitte sind nun diesen grössten Beanspruchungen angepasst und so gewählt worden, dass sie mit nöthiger Sicherheit die in Taf. IV eingeschriebenen Kräfte übertragen können. Dabei verhalten sich natürlich die Querschnitte wie die Kräfte. Die Trägheitsmomente verhalten sich ebenfalls wie diese, weil die Entfernung der Mittelpunkte von Zug und Druck (bezw. Gurtungsschwerpunkte) als konstant angenommen ist.

Es sollen nun die grössten Momente und Schubkräfte ermittelt werden, welche an dem so entstandenen Träger sprungweise veränderlichen Querschnitts eintreten können*). $l_0 = l_3 = 52^m$, $l_1 = l_2 = 65^m$; $p = 2{,}2$ tn, $z = 4{,}5$ tn, $q = p + z = 6{,}7$ tn. Stützpunkte in gleicher Höhe.

A. Vorbereitung.

Nach § 13. gelten in jeder Oeffnung folgende Formeln

51 $$6lE\Theta_1\,\tau = 2M(l^2 + L') + M'(l^2 + L'') + \overset{i}{\Sigma} Pa(l-a)(2l-a) + L''\overset{i}{\Sigma} P(l-a) - \sum_{\nu=1}^{\nu=i} \triangle_\nu K_\nu$$

52 $$6lE\Theta_1\,\tau' = -M(l^2 + L'') - 2M'(l^2 + L''') - \overset{i}{\Sigma} Pa(l-a)(l+a) - 2L'''\overset{i}{\Sigma} P(l-a) + \sum_{\nu=1}^{\nu=i} \triangle_\nu K'_\nu$$

worin bedeuten

48 $$\triangle_\nu = \frac{\Theta_i}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_i}{\Theta_\nu}$$

50
$$\begin{cases} K_\nu = 3(l - e_\nu)\overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^2 + \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^3 \\ K'_\nu = 3e_\nu \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^2 - \overset{e_\nu}{\Sigma} P(e_\nu - a)^3 \end{cases}$$

49
$$\begin{cases} L' = \sum_{\nu=1}^{\nu=i} \triangle_\nu \frac{l^3 - (l - e_\nu)^3}{l} \\ L'' = \sum_{\nu=1}^{\nu=i} \triangle_\nu e_\nu^2 \left(3 - 2\frac{e_\nu}{l}\right) \\ L''' = \sum_{\nu=1}^{\nu=i} \triangle_\nu \frac{e_\nu^3}{l} \end{cases}$$

*) Die Berechnung ist durchaus nicht schwierig, aber umständlich. Es kommt Alles auf eine passende Aufeinanderfolge der Operationen und zweckmässige Fixirung der Resultate an. Der hier befolgte Gang ist in diesen Beziehungen geeignet.

Wir gehen zunächst zur Berechnung der Summen L, soweit sie in der Folge nöthig werden. Die e, $\triangle$ folgen mit Rücksicht auf Tafel IV.

Erste Oeffnung $l_0 = 52$, $e_1 = e_8$, $\Theta_1 = \Theta_8$. (1)

e_ν	$\triangle_\nu$	$\triangle_\nu \frac{e_\nu^3}{l}$
$e_1 =$ 10,5	$\triangle_1 = +$ 0,300	+ 6
$e_2 =$ 13,75	$\triangle_2 = +$ 0,337	+ 17
$e_3 =$ 31,25	$\triangle_3 = -$ 0,337	— 198
$e_4 =$ 34,5	$\triangle_4 = -$ 0,300	— 237
$e_5 =$ 43,5	$\triangle_5 = +$ 0,433	+ 685
$e_6 =$ 46	$\triangle_6 = +$ 0,289	+ 541
$e_7 =$ 48	$\triangle_7 = +$ 0,201	+ 427
$e_8 =$ 50	$\triangle_8 = +$ 0,243	+ 584
		$L''' = +$ 1825

Zweite Oeffnung. $l_1 = 65$, $e_1 = e_{13}$, $\Theta_1 = \Theta_{13}$. (2)

e_ν	$\triangle_\nu$	$\triangle_\nu \frac{l^3-(l-e_\nu)^3}{l}$	$\triangle_\nu e_\nu^2\left(3-2\frac{e_\nu}{l}\right)$	$\triangle_\nu \frac{e_\nu^3}{l}$
$e_1 =$ 1,5	$\triangle_1 = -$ 0,256	— 73	— 2	— 0
$e_2 =$ 3	$\triangle_2 = -$ 0,222	— 124	— 6	— 0
$e_3 =$ 4,75	$\triangle_3 = -$ 0,311	— 267	— 20	— 1
$e_4 =$ 6,75	$\triangle_4 = -$ 0,467	— 553	— 59	— 2
$e_5 =$ 19,25	$\triangle_5 = +$ 0,467	+ 1285	+ 417	+ 51
$e_6 =$ 23,5	$\triangle_6 = +$ 0,311	+ 972	+ 391	+ 62
$e_7 =$ 42,75	$\triangle_7 = -$ 0,311	— 1261	— 957	— 374
$e_8 =$ 47	$\triangle_8 = -$ 0,467	— 1931	— 1603	— 746
$e_9 =$ 56,25	$\triangle_9 = +$ 0,467	+ 1968	+ 1876	+ 1278
$e_{10} =$ 58,75	$\triangle_{10} = +$ 0,311	+ 1313	+ 1279	+ 970
$e_{11} =$ 60,75	$\triangle_{11} = +$ 0,222	+ 938	+ 927	+ 765
$e_{12} =$ 62,25	$\triangle_{12} = +$ 0,167	+ 706	+ 701	+ 620
$e_{13} =$ 63,5	$\triangle_{13} = +$ 0,166	+ 701	+ 700	+ 657
		$L' = +$ 3674	$L'' = +$ 3644	$L''' = +$ 3280

Dritte Oeffnung $l_2 = 65$, $\Theta_1 = \Theta_{13}$, $e_1 = e_{13}$.

e_ν	Δ_ν	$\Delta_\nu \frac{l^3-(l-e_\nu)^3}{l}$	$\Delta_\nu e_\nu^2\left(3-2\frac{e_\nu}{l}\right)$	$\Delta_\nu \frac{e_\nu^3}{l}$
$e_1 = 1{,}5$	$\Delta_1 = -0{,}154$	-44	-1	-0
$e_2 = 2{,}75$	$\Delta_2 = -0{,}155$	-80	-3	-0
$e_3 = 4{,}25$	$\Delta_3 = -0{,}206$	-160	-11	-0
$e_4 = 6{,}25$	$\Delta_4 = -0{,}289$	-319	-32	-1
$e_5 = 8{,}75$	$\Delta_5 = -0{,}433$	-644	-90	-4
$e_6 = 18$	$\Delta_6 = +0{,}433$	$+1138$	$+343$	$+39$
$e_7 = 22{,}25$	$\Delta_7 = +0{,}289$	$+874$	$+331$	$+49$
$e_8 = 41{,}5$	$\Delta_8 = -0{,}289$	-1163	-858	-318
$e_9 = 45{,}75$	$\Delta_9 = -0{,}433$	-1782	-1443	-638
$e_{10} = 58{,}25$	$\Delta_{10} = +0{,}433$	$+1827$	$+1775$	$+1316$
$e_{11} = 60{,}25$	$\Delta_{11} = +0{,}289$	$+1220$	$+1202$	$+972$
$e_{12} = 62$	$\Delta_{12} = +0{,}206$	$+870$	$+865$	$+755$
$e_{13} = 63{,}5$	$\Delta_{13} = +0{,}238$	$+1005$	$+1004$	$+937$
		$L' = +2742$	$L'' = +3082$	$L''' = +3107$

Vierte Oeffnung. $l_3 = 52$, $e_1 = e_8$, $\Theta_1 = \Theta_8$.

e_ν	Δ_ν	$\Delta_\nu \frac{l^3-(l-e_\nu)^3}{l}$	$\Delta_\nu e_\nu^3\left(3-2\frac{e_\nu}{l}\right)$
$e_1 = 2$	$\Delta_1 = -0{,}110$	-33	-1
$e_2 = 4$	$\Delta_2 = -0{,}095$	-55	-4
$e_3 = 6$	$\Delta_3 = -0{,}134$	-111	-13
$e_4 = 8{,}5$	$\Delta_4 = -0{,}200$	-224	-39
$e_5 = 17{,}5$	$\Delta_5 = +0{,}143$	$+274$	$+102$
$e_6 = 20{,}75$	$\Delta_6 = +0{,}151$	$+320$	$+143$
$e_7 = 38{,}25$	$\Delta_7 = -0{,}151$	-401	-337
$e_8 = 41{,}5$	$\Delta_8 = -0{,}143$	-384	-346
		$L' = -614$	$L'' = -495$

Es bestehen nun folgende Relationen:

$$6\, l_0\, E\Theta_8\, \tau_0' = \quad - 9058\, M_1 - 3650 \sum_0 P\,(l-a)$$
$$- \sum_0 Pa\,(l-a)\,(l+a) + \sum_0 \Delta_\nu K_\nu'$$

$$6\,l_1\,E\Theta_{13}\,\tau_1 = 15798\,M_1 + 7869\,M_2 + 3644\,\underset{1}{\Sigma P}\,(l-a) + \underset{1}{\Sigma P a}\,(l-a)\,(2l-a) - \underset{1}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu$$

$$6\,l_1\,E\Theta_{13}\,\tau_1' = -\,7869\,M_1 - 15010\,M_2 - 6560\,\underset{1}{\Sigma P}\,(l-a) - \underset{1}{\Sigma P a}\,(l-a)\,(l+a) + \underset{1}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu'$$

$$6\,l_2\,E\Theta_{13}'\tau_2 = 13934\,M_2 + 7307\,M_3 + 3082\,\underset{2}{\Sigma P}\,(l-a) + \underset{2}{\Sigma P a}\,(l-a)\,(2l-a) - \underset{2}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu$$

$$6\,l_2\,E\Theta_{13}'\tau_2' = -\,7307\,M_2 - 14664\,M_3 - 6214\,\underset{2}{\Sigma P}\,(l-a) - \underset{2}{\Sigma P a}\,(l-a)\,(l+a) + \underset{2}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu'$$

$$6\,l_3\,E\Theta_8'\,\tau_3 = 4180\,M_3 - 495\,\underset{3}{\Sigma P}\,(l-a) + \underset{3}{\Sigma P}\,(l-a)\,(2l-a) - \underset{3}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu$$

wobei wir, um keine Verwechslung herbeizuführen, die Θ_t der Oeffnungen l_2, l_3 durch Θ_{13}', Θ_8' bezeichnet haben. E ist konstant,

$$\frac{\Theta_8}{\Theta_{13}} = \frac{520}{560} = \frac{13}{14}, \quad \frac{\Theta_{13}'}{\Theta_{13}} = \frac{520}{560} = \frac{13}{14}, \quad \frac{\Theta_{13}'}{\Theta_8'} = \frac{520}{240} = \frac{13}{6},$$

$$\tau_0' = \tau_1, \qquad \tau_1' = \tau_2, \qquad \tau_2' = \tau_3,$$

also durch Gleichsetzung der aus obigen Relationen folgenden Werthe der τ:

$$a)\quad \begin{cases} 399{,}8\,M_1 + 112{,}4\,M_2 = -70{,}19\,\underset{0}{\Sigma P}\,(l-a) - \frac{1}{l_0}\underset{0}{\Sigma P a}(l-a)\,(l+a) \\ \qquad + \frac{1}{l_0}\underset{0}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu' - 52{,}06\,\underset{1}{\Sigma P}\,(l-a) \\ \qquad - \frac{13}{14}\frac{1}{l_1}\underset{1}{\Sigma P a}\,(l-a)\,(2l-a) + \frac{13}{14}\frac{1}{l_1}\underset{1}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu = R_1 \\ 112{,}4\,M_1 + 428{,}8\,M_2 + 112{,}4\,M_3 = -\,93{,}71\,\underset{1}{\Sigma P}\,(l-a) \\ \qquad - \frac{13}{14}\frac{1}{l_1}\underset{1}{\Sigma P a}\,(l-a)\,(l+a) + \frac{13}{14}\frac{1}{l_1}\underset{1}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu' \\ \qquad - 47{,}41\,\underset{2}{\Sigma P}\,(l-a) - \frac{1}{l_2}\underset{2}{\Sigma P a}(l-a)\,(2l-a) \\ \qquad + \frac{1}{l_2}\underset{2}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu = R_2 \\ 112{,}4\,M_2 + 399{,}8\,M_3 = -\,95{,}60\,\underset{2}{\Sigma P}(l-a) - \frac{1}{l_2}\underset{2}{\Sigma P a}(l-a)(l+a) \\ \qquad + \frac{1}{l_2}\underset{2}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu' + 20{,}62\,\underset{3}{\Sigma P}\,(l-a) \\ \qquad - \frac{13}{6}\frac{1}{l_3}\underset{3}{\Sigma P a}\,(l-a)(2l-a) + \frac{13}{6}\frac{1}{l_3}\underset{3}{\Sigma}\triangle_\nu K_\nu = R_3 \end{cases}$$

Diese Gleichungen gelten an unserm Träger für jede Belastungsart und für alle Belastungsfälle. Es folgen daraus ganz wie bei Trägern konstanten Querschnitts (§§ 46., 49.) die λ-Systeme.

λ-System der Stütze 1.

$$\begin{array}{r|l|l}
399{,}8\lambda_1 + 112{,}4\lambda_2 = 1 & \lambda_3 = -\frac{562}{1999}\lambda_2 & \lambda_1 = +0{,}002716 \\
112{,}4\,\lambda_1 + 428{,}8\lambda_2 + 112{,}4\lambda_3 = 0 & \lambda_2 = -\frac{281}{993}\lambda_1 & \lambda_2 = -0{,}000768 \\
112{,}4\,\lambda_2 + 399{,}8\lambda_3 = 0 & \lambda_1 = \lambda_1 & \lambda_3 = +0{,}000216
\end{array}$$

λ-System der Stütze 2.

$$\begin{array}{r|l|l}
399{,}8\lambda_1 + 112{,}4\lambda_2 = 0 & \lambda_1 = -\frac{562}{1999}\lambda_2 & \lambda_1 = -0{,}000769 \\
112{,}4\,\lambda_1 + 428{,}8\lambda_2 + 112{,}4\lambda_3 = 1 & \lambda_2 = \lambda_2 & \lambda_2 = -0{,}002735 \\
112{,}4\,\lambda_2 + 399{,}8\lambda_3 = 0 & \lambda_3 = -\frac{562}{1999}\lambda_2 & \lambda_3 = -0{,}000769
\end{array}$$

Für die Pfeilermomente gelten jetzt die Ausdrücke

$$b)\left\{\begin{array}{l}
M_1 = +0{,}002716\,R_1 - 0{,}000768\,R_2 + 0{,}000216\,R_3 \\
M_2 = -0{,}000769\,R_1 + 0{,}002735\,R_2 - 0{,}000769\,R_3 \\
M_3 = +0{,}000216\,R_1 - 0{,}000768\,R_2 + 0{,}002716\,R_3
\end{array}\right.$$

worin sich nur die oben angeschriebenen Werthe der R je nach der Belastung ändern.

Wir betrachten jetzt die Belastungsfälle I, II, III, VII, VIII des Schema Fig. 41. In diesen kommen nur auf die ganze Länge je einer Oeffnung gleichmässig vertheilte Lasten vor. Bezeichnet ganz allgemein u die Last pro Längeneinheit in irgend einer Oeffnung, so ist (wie in § 35.) in jedem Punkte a $P = u \cdot da$

$$\overset{e_\nu}{\Sigma} P\,(e_\nu - a)^2 = \int_0^{e_\nu} u \cdot da\,(e_\nu - a)^2 = \tfrac{1}{3}\,u\,e_\nu^3$$

$$\overset{e_\nu}{\Sigma} P\,(e_\nu - a)^3 = \int_0^{e_\nu} u \cdot da\,(e_\nu - a)^3 = \tfrac{1}{4}\,u\,e_\nu^4$$

ferner nach 50

$$K_\nu = \tfrac{1}{4}\,u\,e_\nu^3\,(4l - 3e_\nu)$$

$$K_\nu' = \tfrac{3}{4}\,u\,e_\nu^4$$

und also

$$\frac{1}{l}\,\Sigma\triangle_\nu K_\nu = \tfrac{1}{4}u\,\Sigma\triangle\,e_\nu^3\left(4 - 3\,\frac{e_\nu}{l}\right)$$

$$\frac{1}{l}\,\Sigma\triangle_\nu K_\nu' = \tfrac{3}{4}\,u\,\Sigma\triangle_\nu\,\frac{e_\nu^4}{l}$$

Diese Summenausdrücke sind nun, soweit nöthig, für die verschiedenen Oeffnungen zu bestimmen.

	Oeffnung l_0 ①	Oeffnung l_1 ②		Oeffnung l_2 ③		Oeffnung l_3 ④
ν	$\Delta_\nu \frac{e_\nu^4}{l}$	$\Delta_\nu e_\nu^3\left(4-3\frac{e_\nu}{l}\right)$	$\Delta_\nu \frac{e_\nu^4}{l}$	$\Delta_\nu e_\nu^3\left(4-3\frac{e_\nu}{l}\right)$	$\Delta_\nu \frac{e_\nu^4}{l}$	$\Delta_\nu e_\nu^3\left(4-3\frac{e_\nu}{l}\right)$
1	+ 70	− 3	− 0	− 2	− 0	− 3
2	+ 232	− 23	− 0	− 12	− 0	− 23
3	− 6180	− 126	− 2	− 60	− 1	− 106
4	− 8173	− 530	− 15	− 262	− 7	− 431
5	+ 29815	+ 10365	+ 986	− 1043	− 39	+ 2292
6	+ 24884	+ 11767	+ 1459	+ 8003	+ 699	+ 3781
7	+ 20514	− 49249	− 15980	+ 9464	+ 1090	− 15153
8	+ 29207	− 88767	− 35059	− 43059	− 13188	− 16412
9		+ 117518	+ 71927	− 78303	− 29183	
10		+ 81258	+ 57000	+ 112239	+ 76693	
11		+ 59538	+ 46518	+ 77063	+ 58589	
12		+ 45396	+ 38580	+ 55895	+ 46830	
13		+ 45445	+ 41523	+ 65156	+ 59533	
	$\frac{3}{4}\sum_0 \Delta_\nu \frac{e_\nu^4}{l}$ = +67777	$\frac{1}{4}\sum_1 \Delta_\nu e^{\nu 3}\left(4-3\frac{e_\nu}{l}\right)$ = + 58147		$\frac{1}{4}\sum_2 \Delta_\nu e_\nu^3\left(4-3\frac{e_\nu}{l}\right)$ = +51270		$\frac{1}{4}\sum_3 \Delta_\nu e_\nu^3\left(4-3\frac{e_\nu}{l}\right)$ = − 6514
		$\frac{3}{4}\sum_1 \Delta_\nu \frac{e_\nu^4}{l}$ = + 155203		$\frac{3}{4}\sum_2 \Delta_\nu \frac{e_\nu^4}{l}$ = + 150762		

Bei gleichmässiger Belastung mit u pro Längeneinheit ist auch (§ 35.)

$$\Sigma P\,(l-a) = \tfrac{1}{2}\,u l^3$$
$$\Sigma P\,(l-a)\,(l+a) = \tfrac{1}{4}\,u l^3$$
$$\Sigma P(l-a)(2l-a) = \tfrac{1}{4}\,u l^3$$

Sind nun die einzeln Oeffnungen mit bezw. u_0, u_1, u_2, u_3, gleichmässig pro Längeneinheit belastet, dann werden nach Substitution aller Werthe der Summenausdrücke

$$R_1 = -(35{,}091\,l_0^2 + \tfrac{1}{4}\,l_0^3 - 67777)\,u_0$$
$$-(26{,}028\,l_1^2 + \tfrac{1}{14}\tfrac{3}{4}\,l_1^3 - \tfrac{1}{14}\tfrac{3}{4}\,58147)\,u_1$$
$$R_2 = -(46{,}857\,l_1^2 + \tfrac{1}{14}\tfrac{3}{4}\,l_1^3 - \tfrac{1}{14}\tfrac{3}{4}\,155203)\,u_1$$
$$-(23{,}707\,l_2^2 + \tfrac{1}{4}\,l_2^3 - 51270)\,u_2$$
$$R_3 = -(47{,}800\,l_2^2 + \tfrac{1}{4}\,l_2^3 - 150762)\,u_2$$
$$-(-10{,}312\,l_3^2 + \tfrac{1}{6}\tfrac{3}{4}\,l_3^3 + \tfrac{1}{6}\,6514)\,u_3$$

und mit Einsetzen der Längen

$$c)\quad \begin{cases} R_1 = -\ 62325\ u_0 - 119787\ u_1 \\ R_2 = -\ 117577\ u_1 - 117577\ u_2 \\ R_3 = -\ 119787\ u_2 - \ 62325\ u_3 \end{cases}$$

Die Gleichungen *a*) und *b*) gelten an unserm Träger ganz allgemein, die Ausdrücke *c*) nur dann, wenn innerhalb jeder Oeffnung für sich die Belastung pro Längeneinheit konstant ist.

B. Maxima der negativen Momente.

Belastungsfall I. Grösster negativer Werth von M_1. Mittelst der Gleichungen *c*), weil $u_0 = q$, $u_1 = q$, $u_2 = p$, $u_3 = q$

$$R_1 = -\ 62325\ q - 119787\ q = -\ 1220150$$
$$R_2 = -\ 117577\ q - 117577\ p = -\ 1046435$$
$$R_3 = -\ 119787\ p - \ 62325\ q = -\ 681109$$

und mit diesen Werthen nach *b*)

$$\max M_1 = +\ 0{,}002716\ R_1 - 0{,}000768\ R_2 + 0{,}000216\ R_3$$
$$= -\ 2657 \text{ mtn.}$$
$$M_2 = -\ 0{,}000769\ R_1 + 0{,}002735\ R_2 - 0{,}000769\ R_3$$
$$= -\ 1400 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall II. Negatives Maximum von M_2.

$$R_1 = -\ 62325\ p - 119787\ q = -\ 886939$$
$$R_2 = -\ 117577\ q - 117577\ q = -\ 1575532$$
$$R_3 = -\ 119787\ q - \ 62325\ p = -\ 886939$$
$$M_1 = +\ 0{,}002716\ R_1 - 0{,}000768\ R_2 + 0{,}000216\ R_3$$
$$= -\ 1390 \text{ mtn.}$$
$$\max M_2 = -\ 0{,}000769\ R_1 + 0{,}002735\ R_2 - 0{,}000769\ R_3$$
$$= -\ 2945 \text{ mtn.}$$

Belastungsfall III. Negative Maxima von o bis I_0' in l_0,

$$R_1 = -\ 62325\ p - 119787\ q = -\ 886939$$
$$R_2 = -\ 117577\ q - 117577\ p = -\ 1046435$$
$$R_3 = -\ 119787\ p - \ 62325\ q = -\ 681109$$

$$M_1 = +\ 0{,}002716\ R_1 - 0{,}000768\ R_2 + 0{,}000216\ R_3 = -\ 1752 \text{ mtn.}$$
$$M_2 = -\ 0{,}000769\ R_1 + 0{,}002735\ R_2 - 0{,}000769\ R_3 = -\ 1656 \text{ mtn.}$$
$$M_3 = +\ 0{,}000216\ R_1 - 0{,}000768\ R_2 + 0{,}002716\ R_3 = -\ 1237 \text{ mtn.}$$

Zur Bestimmung beliebiger Punkte der Momentencurve die Formel 121; danach z. B. für $x = I_0'$*)

---

*) Es ist hier I_0' zu verstehen, wie es für konstanten Querschnitt berechnet wurde (vergl. am Schluss dieses Paragraphen).

$$M_x = -1752\,\frac{41{,}93}{52} + \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 41{,}93 \cdot 10{,}07 = -949\,\text{mtn}.$$

Belastungsfall IIIa. Negative Maxima von I_1 bis I_1'. Wegen der Symmetrie aus Fall III

$$M_1 = -1237\ \text{mtn}, \quad M_2 = -1656\ \text{mtn}.$$

Zur Bestimmung der Momentencurve Gleichung 121; damit z. B.

$$\text{für } x = I_1 \quad M_x = -537\ \text{mtn}$$
$$\text{„ } x = I_1' \quad M_x = -791\ \text{mtn}$$

C. Maxima der positiven Momente.

Belastungsfall IIIa. Positive Maxima von o bis I_0' der Oeffnung l_0. $M = o$, $M' = -1237$. Aus

$$A = \tfrac{1}{52}\,(-1237 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 52^2) = 150{,}4\ \text{tn}$$

und

$$V_x = -150{,}4 + 6{,}7\,x$$

folgt der Ort des grössten positiven Moments in l_0

$$\mu = \frac{150{,}4}{6.7} = 22{,}45^{\text{m}}$$

sodass der Werth desselben nach 121a

$$M_\mu = -1237\,\frac{22 \cdot 45}{52} + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 22{,}45 \cdot 29{,}55 = +1688\ \text{mtn}$$

Beliebige weitere Punkte der Momentencurve in l_0 ebenfalls nach 121a; so z. B. für $x = I_0'$ $M_x = +417$ mtn.

Belastungsfall III. Positive Maxima von I_1 bis I_1'. $M = -1752$, $M' = -1656$. Aus

$$A = \tfrac{1}{65}\,(-1656 + 1752 + \tfrac{1}{2}\,6.7 \cdot 65^2) = 219{,}2\ \text{tn}$$

und

$$V_x = -219{,}2 + 6{,}7x$$

folgt der Ort des grössten positiven Moments in l_1

$$\mu = \frac{219{,}2}{6{,}7} = 32{,}72^{\text{m}}$$

Werth desselben nach 121a

$$M_\mu = -1757\,\frac{32{,}28}{65} - 1656\,\frac{32{,}72}{65} + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 32{,}72 \cdot 32{,}28$$
$$= +1834\ \text{mtn}.$$

Momentencurve in l_1 ebenfalls mittelst 121a. So z. B.

$$\text{für } x = I_1 \quad M_x = +673\ \text{mtn}$$
$$\text{„ } x = I_1' \quad M_x = +685\ \text{mtn}$$

Belastungsfall VII. Positives Maximum oder negatives Minimum von M_1.

$$R_1 = -\ 62325\,p - 119787\,p = -\ 400628$$
$$R_2 = -\ 117577\,p - 117577\,q = -\ 1046435$$
$$R_3 = -\ 119787\,q -\ 62325\,p = -\ 886939$$
$$\min M_1 = +\ 0{,}002716\,R_1 - 0{,}000768\,R_2 + 0{,}000216\,R_3$$
$$= -\ 475 \text{ mtn}$$
$$M_2 = -\ 0{,}000769\,R_1 + 0{,}002735\,R_2 - 0{,}000769\,R_3$$
$$= -\ 1872 \text{ mtn}$$

Belastungsfall VIII. Positives Maximum oder negatives Minimum von M_2.

$$R_1 = -\ 62325\,q - 119787\,p = -\ 681109$$
$$R_2 = -\ 117577\,p - 117577\,p = -\ 517339$$
$$R_3 = -\ 119787\,p -\ 62325\,q = -\ 681109$$
$$M_1 = +\ 0{,}002716\,R_1 - 0{,}000768\,R_2 + 0{,}000216\,R_3$$
$$= -\ 1600 \text{ mtn}$$
$$\min M_2 = -\ 0{,}000769\,R_1 + 0{,}002735\,R_2 - 0{,}000769\,R_3$$
$$= -\ 368 \text{ mtn}$$

Die bis jetzt erhaltenen Resultate genügen, um die Curve der absoluten Maximalmomente (Taf. IV), wie sie für konstanten Querschnitt gefunden wurde, dem jetzigen Träger veränderlichen Querschnitts entsprechend zu corrigiren. Es braucht dies natürlich nur insoweit zu geschehen, als daraus eine veränderte Anordnung der Staffeln entspringt.

D. Maxima der vertikalen Schubkräfte.

Die Curve der Maximalschubkräfte bei dem angenommen veränderlichen Querschnitt weicht so wenig von der entsprechenden Curve für konstanten Querschnitt ab, dass mit unserem Massstab der Tafeln III und IV beide Züge nicht mehr unterschieden werden können. Auch in allen andern Fällen genügt es vollkommen, in jeder Oeffnung den Anfangspunkt (für $x = 0$) und den Endpunkt (für $x = l$) der zwei Züge zu bestimmen. Damit sind zugleich die grössten positiven und negativen Werthe der Schubkräfte innerhalb jeder Oeffnung bekannt und können noch die Curven der Maximalschubkräfte corrigirt werden.

Bei gleichmässiger Belastung einer ganzen Oeffnung mit u pro Längeneinheit ist in derselben (§ 45.)

$$V_0 = \frac{1}{l}(M - M' - \tfrac{1}{2}\,ul^2)$$
$$V_l = \frac{1}{l}(M - M' + \tfrac{1}{2}\,ul^2)$$

Maxima in Oeffnung l_0.

Negatives Maximum für $x = 0$ im Belastungsfall IIIa

$$V_0 = \tfrac{1}{52}\,(1237 - \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 52^2) = -\,150 \text{ tn.}$$

und für $x = l$ im Belastungsfall VII

$$V_l = \tfrac{1}{52}\,(475 + \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 52^2) = +\,66 \text{ tn}$$

Positives Maximum für $x = l$ im Belastungsfall I

$$V_l = \tfrac{1}{52}\,(2657 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 52^2) = +\,225 \text{ tn}$$

und für $x = 0$ im Belastungsfall III

$$V_0 = \tfrac{1}{52}\,(1752 - \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 52^2) = -\,23 \text{ tn}$$

Maxima in Oeffnung l_1

Negatives Maximum für $x = 0$ im Belastungsfall I

$$V_0 = \tfrac{1}{65}\,(-\,2657 + 1400 - \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 65^2) = -\,237 \text{ tn}$$

und für $x = l$ im Belastungsfall VIII

$$V_l = \tfrac{1}{65}\,(-\,1600 + 390 + \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 65^2) = +\,53 \text{ tn}$$

Positives Maximum für $x = l$ im Belastungsfall II

$$V_l = \tfrac{1}{65}\,(-\,1390 + 2945 + \tfrac{1}{2}\,6{,}7 \cdot 65^2) = +\,242 \text{ tn}$$

und für $x = 0$ im Belastungsfall VII

$$V_0 = \tfrac{1}{65}\,(-\,475 + 1872 - \tfrac{1}{2}\,2{,}2 \cdot 65^2) = -\,50 \text{ tn}$$

E. Maxima und Minima der Stützenreactionen.

Ganz analog wie in § 49. erhält man die Maxima

$$T_0 = \quad 150 = 150 \text{ tn} \quad \text{(Fall IIIa)}$$
$$T_1 = 225 + 237 = 462 \text{ tn} \quad (\text{„ I})$$
$$T_2 = 242 + 242 = 484 \text{ tn} \quad (\text{„ II})$$

und die Minima

$$T_0 = \quad 23 = \quad 23 \text{ tn} \quad (\text{„ III})$$
$$T_1 = \quad 66 + \quad 50 = 116 \text{ tn} \quad (\text{„ VII})$$
$$T_2 = \quad 53 + \quad 53 = 106 \text{ tn} \quad (\text{„ VIII})$$

Damit ist die Berechnung des Trägers vollendet.

Zum Vergleich stellen wir in der folgenden Tabelle die Hauptwerthe zusammen, wie sie sich für konstanten und veränderlichen Querschnitt ergeben haben.

Der Querschnitt ist		veränderlich	konstant	Differenz
Grösste Pfeilermomente	M_1	2657	2587	+ 70 mtn
	M_2	2945	2776	+ 169 mtn
Grösste positive Momente in	l_0	1688	1699	− 11 mtn
	l_1	1834	1823	+ 11 mtn
Ort derselben	l_0	22,45	22,52	− 0,07 m
	l_1	32,72	33,12	− 0,40 m
Grösste negative Schubkräfte in	l_0	150	151	− 1 tn
	l_1	237	236	+ 1 tn
Grösste positive Schubkräfte in	l_0	225	224	+ 1 tn
	l_1	242	237	+ 5 tn
Maxima der Stützenreactionen	T_0	150	151	− 1 tn
	T_1	462	460	+ 2 tn
	T_2	484	474	+ 10 tn

Da die Pfeilermomente durch die Verschiedenheit des Querschnitts im Ganzen genommen vergrössert wurden, so lässt sich annehmen, dass die Inflexionspunkte in grössere Entfernung von den Stützen gerückt sind. In der That liegen z. B. die festen Inflexionspunkte der Oeffnung l_1 jetzt bei

$$I_1 = \frac{65}{1+\frac{1999}{562}} = 14{,}26^{\mathrm{m}}$$

$$I_1' = \frac{65}{1+\frac{281}{993}} = 50{,}66^{\mathrm{m}}$$

während die betreffenden Zahlen für konstanten Querschnitt 14,13 und 51,24 waren. Die Influenzpunkte und Grenzpunkte der Beitragsstrecken rücken im selben Sinne. Alle diese Verschiebungen sind sehr gering und können stets die für konstanten Querschnitt berechneten Orte beibehalten werden.

Die oben angeschriebenen Formeln a) gelten an unserm Träger ganz allgemein. Wollte man also ausser den betrachteten noch andre Belastungsarten des Schema Fig. 41 durchnehmen, so hätte man nur die Werthe der Summenausdrücke mit § 35. zu berechnen und nach Bestimmung der Pfeilermomente ganz wie in den gleichen Fällen bei konstantem Querschnitt zu verfahren. Die Herleitung der Summen $\frac{1}{l}\,\Sigma\,\triangle\,E$ ist deshalb etwas umständlich, weil in den K (50)

$$\sum_{e_\nu}^{e_\nu} P\,(e_\nu - a)^2 \text{ und } \sum_{e_\nu}^{e_\nu} P\,(e_\nu - a)^3$$

verschieden ausgedrückt sind, je nachdem $x = e_\nu$ kleiner oder aber grösser als g ist (§ 35.). Tabellarische Anordnung ist beizubehalten. — Für concentrirte und combinirte Belastungen wären die Summenausdrücke in a) den §§ 33. und 36. zu entnehmen.

§ 52. Ursache des Einflusses veränderlichen Querschnitts. Berechnung staffelförmiger Träger nach den Formeln für konstanten Querschnitt.

In der Praxis geschieht es häufig, dass continuirliche Träger nach den Formeln für ein konstantes Trägheitsmoment berechnet, dann aber die Querschnitte streckenweise den gefundenen Momenten angepasst werden, sodass man also einen staffelförmigen Träger konstruirt. Wird dann der Träger auf Grund der neuen Querschnitte berechnet, so finden sich veränderte Momente und Schubkräfte; es erscheinen sogar einzelne Momente bei gewissen Belastungsfällen grösser, bei andern kleiner wie unter Annahme eines konstanten Querschnitts. Woher kommt dies? Wir wollen es durch ein Raisonnement zeigen.

Für jede bestimmte Belastung ist das Gesetz der Momentencurve bei beliebigem Querschnitt (konstant oder veränderlich)

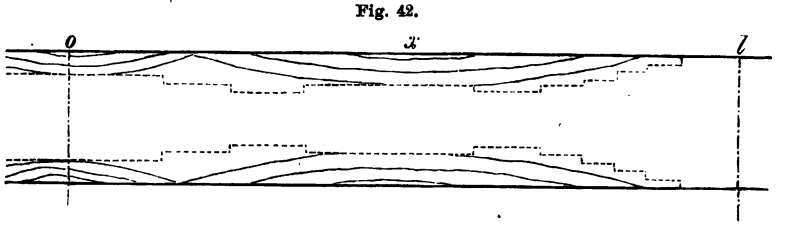
10 $$M_x = M + A_x - \sum^{x} P\,(x-a)$$

worin

9 $$A = \frac{1}{l}\left[M' - M + \sum^{l} P(l-a)\right]$$

Den negativen Momenten bei den Stützen entspricht eine Durchbiegung mit Krümmungscentrum nach unten, den positiven gegen die Mitte der Oeffnungen ein Krümmungscentrum nach oben. In den Wendepunkten, wo der Biegungssinn sich ändert, ist $M_x = 0$. Rücken also die Wendepunkte, so ist dies bei einmal angenommener Belastung (weil das Gesetz 10 bestehen bleibt und $M_x = 0$ an andrer Stelle eintritt) nur in Folge einer Aenderung der Stützenmomente möglich und man kann umgekehrt aus der Bewegung der Wendepunkte auf das Wachsen und Abnehmen der Stützenmomente schliessen.

Fig. 42.



Ein Träger mit vorläufig konstantem Querschnitt sei gegeben und werde eine Oeffnung desselben ohne Rücksicht auf Form und Belastung der andern betrachtet. Es herrscht Gleichgewicht. Wird nun bei x (Fig. 42) Material weggenommen, so biegt sich der Träger daselbst unter der gleichen Last mehr ein, die Wendepunkte bewegen sich nach x zu. Nimmt man auch bei o Material weg, so rücken beide Wendepunkte auf o und man kann im Allgemeinen sagen

Durch Verringerung des Querschnitts an einer bestimmten Stelle nähern sich die Wendepunkte dieser Stelle, durch Verstärkung des Querschnitts entfernen sie sich.

Ebenso wie für eine Gesammtbelastung gilt dieser Satz auch für die Wendepunkte (laufenden Inflexionspunkte) jeder Einzellast und also auch für deren Grenzlagen, die festen Inflexionspunkte. Gehen wir z. B. bei dem Träger des § 51. in Oeffnung l_1 von einem solchen konstanten Querschnitt aus, wie er um Stütze 2 angenommen ist, so sind durch Fortlassen von Material um die Mitte beide Inflexionspunkte nach dorthin vorgerückt; weil aber auch bei o weggelassen wurde, so trat eine weitere Verschiebung hinzu, ein Zurückbewegen von I_1 und ein neues Vorrücken von I_1' fand statt. Dies zeigte sich, indem bei veränderlichem Querschnitt

$$I_1 = 14{,}26^m\,, \qquad I_1' = 50{,}66^m$$

resultirte, während bei konstantem

$$I_1 = 14{,}13^m\,, \qquad I_1' = 50{,}66^m$$

war, sodass sich I_1' um 0,58, I_1 nur um $0{,}13^m$ gegen die Mitte der Oeffnung bewegt hat.

Zur Bestimmung der grössten positiven Momente und grössten Pfeilermomente wird gewöhnlich (wie in §§ 49., 51.) von gleichmässigen Belastungen auf die ganze Länge der einzeln Oeffnungen ausgegangen. Es liegt dann der Maximalmomentenpunkt μ in der Mitte zwischen den wirklichen Wendepunkten (§ 45.). Er rückt also mit diesen und zwar in der Richtung des am meisten verschobenen derselben. Wäre nur eine betrachtete Oeffnung belastet oder hätte man einen einfachen Träger mit eingespannten Enden, so würde durch die Veränderlichkeit des Querschnitts das Moment über derjenigen Stütze vergrössert, von welcher sich μ entfernt, es würde verkleinert über der Stütze, welcher sich μ genähert hat.

Die Veränderungen sind um so grösser, je stärker die Belastung.

Bei einfachen Trägern mit frei aufliegenden Enden, wo die Veränderlichkeit des Querschnitts ohne Einfluss auf die Momente, wird auch der Ort der Wendepunkte nicht geändert, sie bleiben bei o und l; ebenso hat μ bei bestimmter Belastung für alle Querschnittsvariationen ein und denselben Ort.

Nach allem Gesagten hätten wir auch ohne Rechnung in Bezug auf unsern Träger von §§ 49., 51. folgende Schlüsse ziehen können.

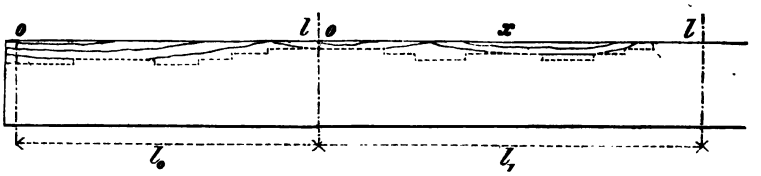
Erste Oeffnung. Bei o Material weggenommen, Wendepunkte von Stütze 1 entfernt, M_1 gewachsen. Wachsthum um so grösser, je grösser Belastung von l_0. μ näher an o, M_μ nimmt ab.

Zweite Oeffnung. Bei x Material weg, beide Wendepunkte auf x. Um o weggenommen, die Wendepunkte auf o hin. μ in der Richtung

auf Stütze 1, M_1 nimmt ab, M_2 wächst. Aenderung um so grösser je stärker Belastung von l_1.

Da der Einfluss der Veränderlichkeit des Querschnitts in einer bestimmten Oeffnung mit der Stärke der Belastung dieser Oeffnung

Fig. 43.



wächst, und mit Rücksicht auf die Gesammtbelastungen, welche für die grössten Momente massgebend sind, konnte nun weiter geschlossen werden, dass max M_2 am meisten wachsen müsste (+ 169 mtn), — dass wegen entgegengesetzter Wirkung der Veränderlichkeit in l_0 und l_1 auf M_1 das Moment max M_1 sich weniger ändern würde (+ 70 mtn), — dass z. B. im Belastungsfall III, wegen des relativ grössern Einflusses der Veränderlichkeit in l_1 gegen die in l_0, das Moment M_1 kleiner ausfallen würde, (— 105 mtn) wie bei konstantem Querschnitt, während M_2 auch in diesem Falle wächst (+ 73 mtn) u. s. w. — Die Schlüsse lassen sich auf jede Variation des Querschnitts und alle Belastungsfälle ausdehnen, wobei man von einem ganz beliebigen konstanten Querschnitt ausgehen kann.

Was nun die Frage betrifft, ob es zulässig ist, Träger mit sprungweise veränderlichem Querschnitt nach den für konstanten Querschnitt geltenden Formeln zu berechnen, so können wir dieselbe für alle dem Ingenieur vorkommenden Fälle bejahen. Die aus beiden Rechnungen folgenden grössten Momente, von welchen bei der Dimensionenbestimmung ausgegangen wird, differiren stets sehr wenig. An unserm Träger, wo doch die Querschnitte zwischen 1 und $\frac{13}{6}$ variiren, fand sich als grösste Differenz 6% (für max M_2) die zunächst folgende fällt schon auf 2,7% (für max M_1) herab. Die Schubkräfte ändern sich fast gar nicht. Nur für Brücken mit sehr grossen Spannweiten empfiehlt es sich, eine zweite Rechnung auf Grund des veränderlichen Querschnitts vorzunehmen, die nie weiter ausgedehnt zu werden braucht, wie in § 51.

Berechnet man nach den Formeln für konstanten Querschnitt, so halte man sich aber an die genaue Theorie; denn sonst können ganz andere Fehler eintreten, wie am Schlusse des § 49. gezeigt wurde (dort bis 17%). Wenn die Auswahl der Eisensorten erlaubt, die Querschnitte über den Stützen etwas reichlicher zu greifen, als die so berechneten grössten Momente verlangen (wogegen in der Mitte

der Oeffnungen etwas knapper konstruirt werden darf), so ist damit auch allen theoretischen Gesichtspunkten Genüge geleistet.

In § 47. sind die Mittel gegeben, durch directe Bestimmung der Quotienten B, B' und damit der Grenzpunkte der Beitragsstrecken (§ 25.), die genauen Berechnungen für konstanten Querschnitt vorzunehmen, auch ohne sich auf die Theorie der λ-Systeme einzulassen, die indessen einfach genug ist.

§ 53. Berechnung eines continuirlichen Brückenträgers mit concentrirten und gleichmässig vertheilten Lasten.

Eine durch continuirliche Träger gebildete Brücke von 3 Oeffnungen zu 12^m, 15^m, 12^m ist projectirt. Unter Annahme, dass dieselbe ein Geleise zu tragen hat, welches von Engerthschen Tendermaschinen befahren wird, sollen berechnet werden

1) die grössten Pfeilermomente und die grössten positiven Momente in den Oeffnungen (Bestimmung des Gurtungsquerschnitts);

2) die grösste vertikale Schubkraft am ganzen Träger (Stärke der Vertikalplatte, kleinste Niettheilung);

3) der grösste Druck auf jede der Zwischenstützen, die aus eisernen Säulen gebildet werden (Dimensionen der Letztern).

Das Geleise soll auf den Hauptträgern direct ruhen und die Berechnung mittelst der concentrirten Lasten und eines gleichmässig vertheilten Eigengewichts von 1,5 tn pro laufenden Meter Brücke durchgeführt werden. Querschnitt konstant. Stützen für die erste Berechnung gleich hoch. Gewicht und Raumerforderniss der Engerthschen Tendermaschinen sind aus Fig. 44—46 zu ersehen, wobei die Gewichte pro Achse verstanden.

Nach § 32. gelten folgende Formeln

$$2M_1(l_0+l_1)+M_2l_1=-\frac{1}{l_0}\sum_0 Pa(l-a)(l+a)-\frac{1}{l_1}\sum_1 Pa(l-a)(2l-a)$$

$$M_1l_1+2M_2(l_1+l_2)=-\frac{1}{l_1}\sum_1 Pa(l-a)(l+a)-\frac{1}{l_2}\sum_2 Pa(l-a)(2l-a)$$

Bezeichnen wir wieder nach 57 die rechte Seite durch R_1, R_2 und scheiden das gleichmässig vertheilte Eigengewicht aus den Summen aus (§ 36.) so folgt

$$54\,M_1 + 15\,M_2 = R_1$$
$$15\,M_1 + 54\,M_2 = R_2$$

$$R_1=-\tfrac{1}{4}pl_0^3-\tfrac{1}{4}pl1^3-\frac{1}{l_0}\sum_0 Pa(l-a)(l+a)-\frac{1}{l_1}\sum_1 Pa(l-a)(2l-a)$$

$$R_2=-\tfrac{1}{4}pl_1^3-\tfrac{1}{4}pl_2^3-\frac{1}{l_1}\sum_1 Pa(l-a)(l+a)-\frac{1}{l_2}\sum_2 Pa(l-a)(2l-a)$$

worin die Summenausdrücke nur noch concentrirte Lasten enthalten.

Die Berechnung kann mit 4 verschiedenen Belastungsfällen*) durchgeführt werden. Bei Feststellung derselben ist das in §§ 19., 24., 27., 28. Gesagte zu beachten. Zur bessern Beurtheilung derjenigen Belastung, welche das grösste Moment über einer Zwischenstütze erzeugt, können die festen Influenzpunkte bestimmt werden. Wir berechnen ohne λ-System und entnehmen also aus § 47.

$$B_1' = -\frac{1}{2\,(1+\frac{1}{12})} = -0{,}28, \qquad B_2' = 0$$

hiermit aus Formel 77

$$\alpha_1 = 0{,}378\,l_1, \qquad \alpha_2 = 0{,}423\,l_2$$

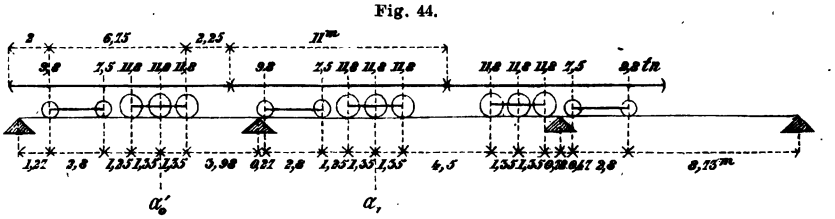
Die andern liegen symmetrisch, also

in l_0		$\alpha_0' = 6{,}92^m$
in l_1	$\alpha_1 = 5{,}67^m$	$\alpha_1' = 9{,}33^m$
in l_2	$\alpha_2 = 5{,}08^m$	

Im Folgenden sind Momente und Kräfte für die ganze Brücke berechnet, die Beanspruchung des einzeln Trägers beträgt also die Hälfte.

Belastungsfall I. (Fig. 44.) Grösstes Moment über einer Zwischenstütze. Es wirken folgende concentrirte Lasten:

Fig. 44.



in Oeffnung l_0			in Oeffnung l_1	
$P_1 = 9{,}8$	bei $a_1 = 1{,}27$		$P_1 = 9{,}8$	bei $a_1 = 0{,}27$
$P_2 = 7$	$a_2 = 4{,}07$		$P_2 = 7$	$a_2 = 3{,}07$
$P_3 = 11{,}8$	$a_3 = 5{,}32$		$P_3 = 11{,}8$	$a_3 = 4{,}32$
$P_4 = 11{,}8$	$a_4 = 6{,}67$		$P_4 = 11{,}8$	$a_4 = 5{,}67$
$P_5 = 11{,}8$	$a_5 = 8{,}02$		$P_5 = 11{,}8$	$a_5 = 7{,}02$
in Oeffnung l_2			$P_6 = 11{,}8$	$a_6 = 11{,}52$
$P_1 = 7$	$a_1 = 0{,}47$		$P_7 = 11{,}8$	$a_7 = 12{,}87$
$P_2 = 9{,}8$	$a_2 = 3.27$		$P_8 = 11{,}8$	$a_8 = 14{,}22$

Durch Einsetzen dieser Werthe in R_1, R_2 erhält man

$$R_1 = -1914 - 2448 - 4632 = -8994$$
$$R_2 = -1914 - 4659 - 610 = -7183$$

*) Wird bei Annahme eines konstanten Querschnitts eine Ausgleichung der Momente durch Senkung der Zwischen nicht beabsichtigt, so sind die Belastungsfälle II und III überflüssig, weil es sicher ist, dass das absolut grösste Moment über einer Zwischenstütze eintritt.

somit aus

$$54\,M_1 + 15\,M_2 = -\,8994$$
$$15\,M_1 + 54\,M_2 = -\,7183$$
$$\max\ M_1 = -\,140{,}4\ \text{mtn},\quad M_2 = -\,94\ \text{mtn}.$$

Belastungsfall II. Grösstes positives Moment in l_1. Laststellung wie im Fall I mit Hinweglassung der Maschine in l_0. Die P und a bleiben also in l_1 und l_2 wie oben.

$$R_1 = -\,1914 - 4632 \qquad = -\,6546$$
$$R_2 = -\,1914 - 4659 - 610 = -\,7183$$
$$54\,M_1 + 15\,M_2 = -\,6546$$
$$15\,M_1 + 54\,M_2 = -\,7183$$

Hieraus ergeben sich

$$M_1 = -\,91{,}3\ \text{mtn},\qquad M_2 = -\,107{,}7\ \text{mtn}.$$

9 $$A = \frac{1}{l}\left[M' - M + \sum_{1}^{i} P\,(l-a)\right]$$

Innerhalb l_1 nach § 36.

$$\sum_{1}^{i} P\,(l-a) = \tfrac{1}{2}\,p\,l^2 + \sum_{1}^{m} P\,(l-a) = 802{,}3\ \text{mtn}$$

$$A = \tfrac{1}{15}\,[-\,107{,}7 + 91{,}3 + 802{,}3] = 52{,}4\ \text{tn}$$

Der Punkt $V_x = 0$ d. h. der Maximalmomentenpunkt μ liegt unter dem Rad P_5. Daselbst ist in

27 $$M_\mu = M + A\,\mu - \sum_{1}^{\mu} P\,(\mu - a)$$

$$\sum_{1}^{\mu} P\,(\mu - a) = \tfrac{1}{2}\,p\,\mu^2 + \sum_{1}^{z} P\,(\mu - a) = 178{,}5$$

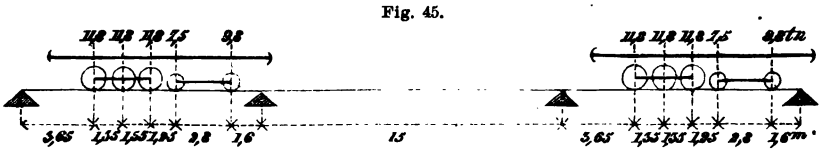
und durch Substitution

$$M_\mu = -\,91{,}3 + 52{,}4 \cdot 7{,}02 - 178{,}5 = +\,98{,}0\ \text{mtn}.$$

Hätte man die Stellung der 2 Maschinen so angenommen, dass die Berührungsfläche der Puffer gerade über die Mitte von l_1 getroffen wäre, so würde das Maximalmoment in l_1 bei $\mu = \frac{l}{2}$ nur + 86,9 mtn betragen haben.

Belastungsfall III (Fig. 45.). Grösstes positives Moment in l_0. Von concentrirten Lasten wirken in l_0 und l_2

Fig. 45.



$$P_1 = 11{,}8 \text{ bei } a_1 = 3{,}65$$
$$P_2 = 11{,}8 \qquad a_2 = 5{,}00$$
$$P_3 = 11{,}8 \qquad a_3 = 6{,}35$$
$$P_4 = 7 \qquad a_4 = 7{,}60$$
$$P_5 = 9{,}8 \qquad a_5 = 10{,}40$$

Damit ergeben sich

$$R_1 = -1914 - 2388 = -4302$$
$$R_2 = -1914 - 2403 = -4317$$
$$54\,M_1 + 15\,M_2 = -4302$$
$$15\,M_1 + 54\,M_2 = -4317$$
$$M_1 = -62{,}3 \text{ mtn}, \quad M_2 = -62{,}6 \text{ mtn}.$$

Formeln für A und M_μ wie im Belastungsfall II. In l_0

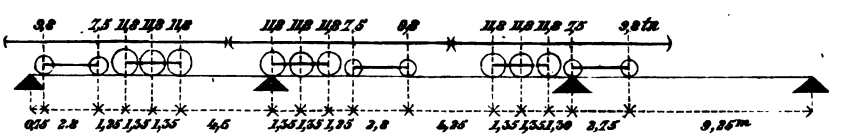
$$\sum_1^i P\,(l-a) = \tfrac{1}{2}\,p\,l^2 + \sum_1^m P\,(l-a) = 402{,}3$$
$$A = \tfrac{1}{12}\,[-62{,}3 + 402{,}3] = 28{,}3 \text{ tn}$$

Der Maximalmomentenpunkt μ, wo $V_x = 0$, liegt unter P_2; daselbst

$$\sum_1^\mu P\,(l-a) = \tfrac{1}{2}\,1{,}5 \cdot 5^2 + 11{,}8 \cdot 1{,}35 = 34{,}7$$
$$M_\mu = 28{,}3 \cdot 5 - 34{,}7 = +106{,}8 \text{ mtn}.$$

Belastungsfall IV. (Fig. 46.) Grösste vertikale Schubkraft am Träger (in l_1 bei $x = 0$) und grösster Druck auf eine Zwischenstütze. Es wirken von concentrirten Lasten:

Fig. 46.



in Oeffnung l_0

$P_1 = 9{,}8$	bei	$a_1 = 0{,}75$	$P_1 = 11{,}8$	bei	$a_1 = 0$
$P_2 = 7$		$a_2 = 3{,}55$	$P_2 = 11{,}8$		$a_2 = 1{,}35$
$P_3 = 11{,}8$		$a_3 = 4{,}80$	$P_3 = 11{,}8$		$a_3 = 2{,}70$
$P_4 = 11{,}8$		$a_4 = 6{,}15$	$P_4 = 7$		$a_4 = 3{,}95$
$P_5 = 11{,}8$		$a_5 = 7{,}50$	$P_5 = 9{,}8$		$a_5 = 6{,}75$
in Oeffnung l_2			$P_6 = 11{,}8$		$a_6 = 11{,}00$
$P_1 = 9{,}8$	bei	$a_1 = 2{,}75$	$P_7 = 11{,}8$		$a_7 = 12{,}35$
			$P_8 = 11{,}8$		$a_8 = 13{,}70$
			$P_9 = 7$		$a_9 = 14{,}95$

Mit diesen Werthen finden sich

$$R_1 = -1914 - 2220 - 4369 = -8503$$
$$R_2 = -1914 - 3893 - 441 = -6248$$
$$54\,M_1 + 15\,M_2 = -8503$$
$$15\,M_1 + 54\,M_2 = -6248$$
$$M_1 = -134{,}8 \text{ mtn}, \quad M_2 = -78 \text{ mtn}$$

Die vertikale Schubkraft für $x = 0$ ist immer ausgedrückt durch

20 $$V_0 = -A = \frac{1}{l}\left[M - M' - \sum_{1}^{i} P\,(l-a)\right]$$

in Oeffnung l_1 wird

$$\sum_{1}^{i} P\,(l-a) = \tfrac{1}{2}\,p\,l^2 + \sum_{1}^{m} P\,(l-a) = 904{,}3$$

sodass nach gleichzeitiger Substitution von M, M'

$$V_0 = -A = \tfrac{1}{15}\,[-134{,}8 + 78 - 904{,}3] = -64{,}1 \text{ tn.}$$

Dies ist die grösste vertikale Schubkraft, welche an irgend einer Stelle des Trägers vorkommen kann.

Im gleichen Belastungsfall ist in Oeffnung l_0 für $x = l$ nach der allgemeinen Formel

21 $$V_l = A' = \frac{1}{l}\left[M - M' + \sum_{1}^{i} P\,a\right]$$

und mit

$$\sum_{1}^{i} P\,a = \tfrac{1}{2}\,p\,l^2 + \sum_{1}^{m} P\,a = 357{,}9$$

$$V_l = A' = \tfrac{1}{12}\,[134{,}8 + 357{,}9] = 41{,}1 \text{ tn}$$

Der grösste Druck auf eine Zwischenstütze folgt nun

$$T_1 = 64{,}1 + 41{,}1 = 105 \text{ tn}$$

und damit ist alles Verlangte bestimmt.

Senkung der Zwischenstützen. Eine Momentenausgleichung durch Senkung der Zwischenstützen bei so kleinen Spannweiten würde sich nicht empfehlen. Wir geben das sonst eintretende Verfahren als weiteres Beispiel derartiger Rechnungen. Es wird verlangt, dass die grössten Momente, welche über den Zwischenstützen und in der Mittelöffnung entstehen können, numerisch gleiche Werthe haben.

Der Symmetrie halber sind die Zwischenstützen um gleichviel zu senken, es nehmen also auch die Momente M_1, M_2 um gleichviel $D_1 = D_2 = D$ zu oder ab und folgt aus 120 weil $c_1 - c_2 = 0$

$$(2\,l_0 + 3\,l_1)\,D = -6\,E\,\Theta\,\frac{c_0 - c_1}{l_0}$$

und wenn man bezeichnet

$$c_1 - c_0 = c_2 - c_3 = d$$

$$d = \frac{(2\,l_0 + 3\,l_1)\,l_0}{6\,E\,\Theta}\,D$$

D bleibt für jede Belastungsart und für alle Belastungsfälle konstant; demnach im Belastungsfall I

$$\max M_1 = -140{,}4 + D$$

und im Belastungsfall II wo das positive M_μ in l_1 am grössten

$$M_1 = -91{,}3 + D, \quad M_2 = -107{,}7 + D$$

$$M_\mu = 98 + D$$

Die gestellte Bedingung lautet demnach

$$98 + D = 140{,}4 - D \qquad \text{somit}$$
$$D = 21{,}2 \text{ mtn}$$

und es wird nun

$$\max M_1 = -140{,}4 + 21{,}2 = -119{,}2 \text{ mtn}$$
$$\text{in } l_1 \quad M_\mu = \quad 98 \quad + 21{,}2 = +119{,}2 \text{ mtn.}$$

In l_0 tritt das grösste M_μ im Belastungsfall III ein; weil dann

$$M_1 = -62{,}3 + 21{,}2 = -41{,}1$$
$$A = 28{,}3 + \frac{21{,}2}{12} = 30{,}1$$

so wird bei der jetzigen Höhenlage der Stützen

$$M_\mu = 106{,}8 + \frac{21{,}2}{12}\,5 = 115{,}7 \text{ mtn}$$

Der Mehrverbrauch an Gurtungsmaterial beträgt bei Unterlassen der Senkung und konstantem Querschnitt ca. 18%.

Rechnungen mit concentrirten Lasten wie die vorstehende wird man für gewöhnlich nicht ausführen. Sie könnten vorkommen, z. B. um zu untersuchen, mit welcher Sicherheit eine bestehende Brücke durch Fahrzeuge befahren werden kann, wie sie beim Bau der erstern nicht vorgesehen waren. Hierbei kommt es nicht nur auf die Grösse der Achsenbelastung, sondern wesentlich auf Radstand und Pufferlänge an. Dagegen ist in gewissen Fällen die Berechnung mittelst concentrirter Lasten von vornherein indicirt, wovon wir in § 55. Beispiele geben wollen.

Hätte man die Rechnung unter Annahme einer gleichmässig vertheilten Verkehrsbelastung von $z = 5{,}5$ tn also mit $q = p + z = 7$ tn durchgeführt, so würde sich in den bezw. ungünstigsten Belastungsfällen Resultate ergeben haben, die wir des Vergleichs halber mit den oben gefundenen zusammenstellen.

Grösste Pfeilermomente über Stütze 1 und 2
mit conc. L. 140,4, mit gleichm. v. L. 142,6 mtn.
Grösste positive Momente M_μ in l_0 und l_2
mit conc. L. 106,8, mit gleichm. v. L. 96,8 mtn.
Grösstes positives Moment M_μ in Oeffnung l_1
mit conc. L. 98,0, mit gleichm. v. L. 101,8 mtn.
Grösste vertikale Schubkraft am ganzen Träger
mit conc. L 64,1, mit gleichm. v. L. 62,0 tn.
Grösster Druck auf die Zwischenstützen
mit conc. L. 104,4, mit gleichm. v. L. 115,6 tn.

§ 54. Längenverhältnisse.

Es ist schon recht viel über das zweckmässigste Längenverhältniss der Oeffnungen continuirlicher Träger geschrieben worden, wobei allerdings die Zweckmässigkeit von verschiedenen Schriftstellern verschieden aufgefasst wird. Wir haben in dieser Beziehung wenig zu sagen. Die meisten derartigen Erörterungen könnten infolge der Voraussetzungen, die sie in Bezug auf Belastung machen — manch-

mal auch wegen der Resultate, zu denen sie gelangen — nur theoretisches Interesse hervorrufen. Ein solches würde aber nur dann vorhanden sein, wenn die Untersuchung zu Resultaten gelangte, welche eine allgemeine Eigenschaft der continuirlichen Träger in sich schlössen, was nie der Fall.

Eine allgemeine Regel über dass zweckmässigste Längenverhältniss existirt nicht; dies ist stets abhängig von der Lastvertheilung und von der Anzahl der Oeffnungen. Dabei mag man als zweckmässig auffassen, was man will. Wenn Belastung, Oeffnungszahl und zu erreichendes Ziel festgestellt sind, dann kann weiter geschlossen werden. Ist z. B. die Last über den ganzen Träger gleichmässig vertheilt, die Anzahl der Oeffnungen ∞, und man will lauter gleiche Stützenmomente erzeugen, so müssen alle Oeffnungen gleichlang gemacht werden. Dies würde auch dann noch nöthig sein, wenn die gleichmässig vertheilte Belastung aus Eigengewicht und Verkehrslast bestehen könnte, und man wie in § 50. alle diejenigen grössten Werthe gleich haben wollte, welche die Stützenmomente in den bezw. ungünstigsten Belastungsfällen annehmen.

Im gewöhnlichen Leben hat man es nur mit einer endlichen Anzahl Oeffnungen zu thun und es interessirt besonders das beste Längenverhältniss der Endöffnungen zu den innern Oeffnungen, welche letztere gleich gedacht werden. Da fragt es sich zunächst, was man erreichen will. Das bezügliche Verlangen von Culmann ist am rationalsten, er will dass die Maximalmomente M_μ in allen Oeffnungen bei den resp. ungünstigsten Belastungen etwa gleich seien. Für die gewöhnliche Berechnungsart mit gleichmässig vertheilten Lasten heisst dies: es sollen in den für die einzeln Oeffnungen ungünstigsten Belastungsfällen die Entfernungen der Wendepunkte für alle Oeffnungen gleich gross sein (§ 45.). Dies vorausgesetzt, geben wir für praktische Fälle folgende auf praktische Fälle gegründeten Anhaltspunkte.

Die Wendepunkte in jedem Belastungsfall, welcher für eine bestimmte Oeffnung das grösste positive Moment erzeugt, liegen in dieser Oeffnung immer ausserhalb der Strecke zwischen den festen Inflexionspunkten. Diese liegen circa $^1/_5$ der Spannweite von den Stützen entfernt. Für den Grenzfall, dass die Wendepunkte mit den festen Inflexionspunkten zusammenfielen, wäre das Verhältniss einer Endöffnung l_0 zu einer folgenden Oeffnung l so zu verlangen, dass

$$\tfrac{4}{5}\, l_0 = \tfrac{3}{5}\, l \qquad \text{also}$$
$$l_0 = \tfrac{3}{4}\, l$$

In allen von uns untersuchten Fällen fanden sich die obigen Wendepunkte weiter als $^1/_8$ der Spannweite von den Stützen entfernt; im Grenzfalle wäre aus

$$\frac{7}{8} l_0 = \frac{6}{8} l$$
$$l_0 = \frac{6}{7} l$$

Es sind also alle innern Oeffnungen l gleichlang, $\frac{l_0}{l}$ aber zwischen $\frac{3}{4}$ und $\frac{6}{7}$ oder, weil hierfür die Grenzlagen der Wendepunkte etwas extrem gegriffen sind, zwischen $\frac{4}{5}$ und $\frac{5}{6}$ zu wählen.

In der Praxis wirken bei Festsetzung der Längen sehr verschiedene Erwägungen mit. Es kommen Terrainverhältnisse, Fundamentboden, ästhetische Forderungen in Betracht. Da sich nun das gefundene Verhältniss auch in letzterer Beziehung empfiehlt, so thut man gut, bei Feststellung der Spannweiten darauf Rücksicht zu nehmen.

§ 55. Kleine continuirliche Träger. Berechnung eines continuirlichen Trägers mit eingespannten Enden.

Im Allgemeinen sollen bei kleinen Spannweiten continuirliche Träger vermieden werden, weil dann der erwartete Vortheil gering und der Einfluss kleiner Senkungen der Zwischenstützen bedeutend ist. Indessen finden Ausnahmen genug statt und sind zulässig. So wurden im Jahre 1870 in Berlin 3 Brücken aufgestellt, welche bei Oeffnungen von $7\frac{1}{2}$—15^m aus continuirlichen Trägern bestehen. Damals handelte es sich darum, entweder einfache Träger von $27\frac{1}{2}$ und $39\frac{1}{4}^m$ Länge oder aber continuirliche mit je 3 kleinen Oeffnungen zu wählen. Die zu überbrückenden lebhaften Verkehrsstrassen liessen nur ganz schlanke eiserne Säulen an den Trottoirgrenzen zu, welche als Auflager zweier einfacher Träger nicht ausreichten. Für einen einfachen Träger über die ganze Lichtweite konnte der Materialverbrauch sehr gut das Doppelte betragen, was genügen musste, die Combination fallen zu lassen. Uebrigens wurden, um die Nachtheile ungleichmässiger Senkungen zu vermeiden, die Träger über den Mittelstützen auf Keile gelegt und die Oberkante nach genauer Montirung abnivellirt, sodass jederzeit durch Antreiben oder Nachlassen der Keile die ursprüngliche Lage wieder hergestellt werden kann.

Bei ganz kleinen Trägern ist es oft gar nicht der ökonomische Gesichtspunkt, welcher bei Entscheiden der Frage, ob continuirliche ob einfache Träger den Ausschlag gibt. So in den folgenden Fällen. Im Zuge der neuen Berliner Verbindungsbahn befinden sich fast nur schiefe Ueberbrückungen. Die Unterstützung der letzten Querträger musste mittelst schiefer Endträger bewerkstelligt werden, wie in den Anordnungen Fig. 47 und 48, deren Nothwendigkeit klar zu machen, zu weit führen würde. Unterhalb der schiefen Endträger laufen die steinernen Pfeiler hin, sodass leicht eine Zwischenunterstützung möglich war. Dieselbe schien geboten wegen zu grosser Einbiegung bei

Annahme eines einfachen Trägers, in Fig. 47 auch wegen zu grosser Länge desselben. Mehrere in gleicher Linie liegende einfache Träger waren nicht zweckmässig, weil eine Hauptaufgabe der schiefen Endträger die möglichste Versteifung der ganzen Enddreiecke ist. Es

Fig. 47.

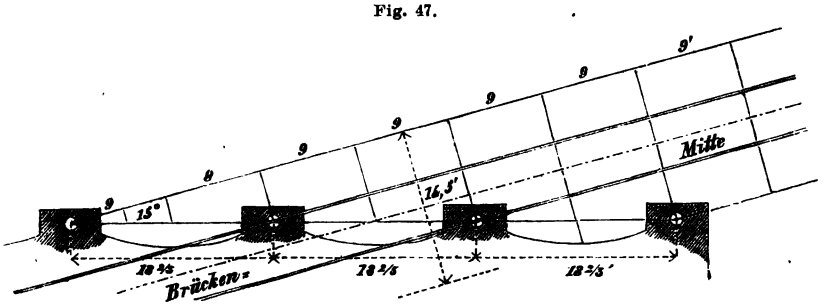
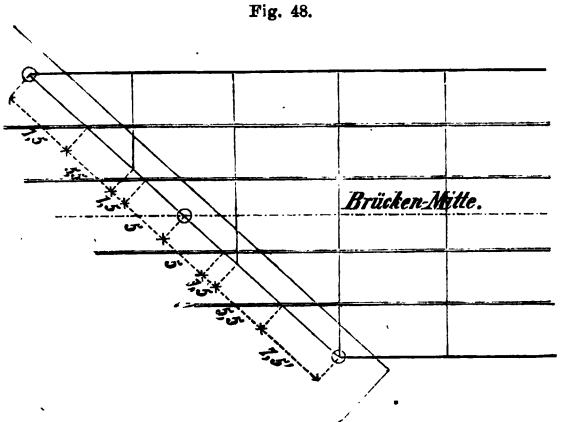


Fig. 48.



wurden also vom Verfasser continuirliche Träger angenommen und nach unsern Formeln für combinirte Belastungen berechnet.*)

Obwohl die Träger mit den sehr massigen Hauptträgerenden (Schwedlers System) durch zahlreiche Niete in doppelten Reihen verbunden sind, kann doch die Einspannung nicht als absolut gelten. Weil es nun weniger auf Materialersparniss als auf eine recht steife Construction ankam, so wurde die Rechnung sowohl für freie wie für unwandelbare festgespannte Enden durchgeführt. Die Dimensionen sind dann stets den jeweilen ungünstigsten Resultaten angepasst.

Wir lassen nun das Verfahren bei Berechnung des Endträgers von Fig. 48 als Beispiel der Berechnung eines continuirlichen Trägers mit eingespannten Enden folgen.

*) Erläuterungsberichte ans Ministerium für Handel etc. vom October 1869 und Februar 1870. Da es sich hier nur darum handelt, den allgemeinen Gang zu zeigen, so schien es überflüssig die Resultate nach Metern und Tonnen umzurechnen.

Zwei gleiche Oeffnungen von $l = 19\frac{1}{2}$ Fuss Spannweite. Eigengewicht pro laufenden Fuss $p = 1\frac{1}{2}$ Centner. Querschnitt konstant. Stützen gleichhoch. Nach Berechnung der Querträger zeigte sich, dass die in Fig. 49 und 50 angedeuteten ungünstigsten Belastungsfälle eintreten können.

Es wurden folgende Formeln verwendet, in denen die Summenausdrücke nur noch concentrirte Lasten enthalten (§§. 32., 36.).

Berechnung der Stützenmomente

$$M_0 + 4M_1 + M_2 = -\tfrac{1}{2} p l^2 - \frac{1}{l^2} \sum_0 P a (l-a)(l+a) - \frac{1}{l^2} \sum_1 P a (l-a)(2l-a)$$

$$2M_0 + M_1 = -\tfrac{1}{4} p l^2 - \frac{1}{l^2} \sum_0 P a (l-a)(2l-a)$$

$$M_0 + 2M_2 = -\tfrac{1}{4} p l^2 - \frac{1}{l^2} \sum_1 P a (l-a)(l+a)$$

Fig. 49.

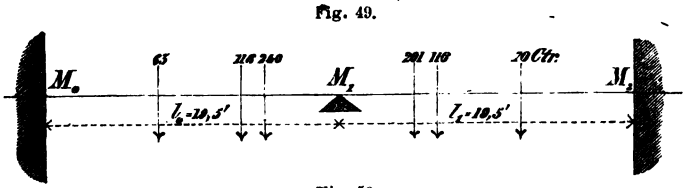
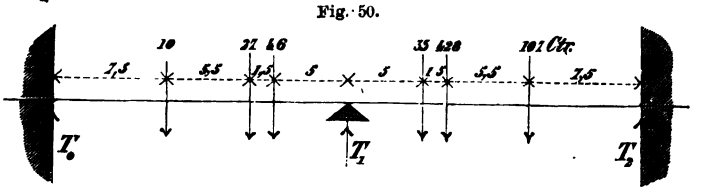


Fig. 50.



Wird der Träger als frei aufliegend betrachtet, dann folgt das einzige Stützenmoment M_1 aus

$$4M_1 = -\tfrac{1}{2} p l^2 - \frac{1}{l^2} \sum_0 P a (l-a)(l+a) - \frac{1}{l^2} \sum_1 P a (l-a)(2l-a)$$

Vertikale Schubkräfte rechts und links der Stützen

$$V_0 = -A = \frac{1}{l}\left[M - M' - \tfrac{1}{2} p l^2 - \sum_1^m P (l-a)\right]$$

$$V_l = A' = \frac{1}{l}\left[M - M' + \tfrac{1}{2} p l^2 + \sum_1^m P a\right]$$

Ort μ des positiven Maximalmoments aus

$$V_\mu = p\mu + \sum^z P - A = 0$$

Werth des positiven Maximalmoments

$$M_\mu = M + A\mu - \tfrac{1}{2} p \mu^2 - \sum^z P (\mu - a)$$

Stützenreaktionen

$$T_0 = A_0, \quad T_1 = A_0' + A_1, \quad T_2 = A_1'$$

Mit diesen Formeln ergeben sich folgende Werthe.

Belastungsfall		I (Fig. 49)		II (Fig. 50)	
Trägerenden		eingespannt	freiaufliegend	eingespannt	freiaufliegend
Stützenmomente	M_0	— 476	0	165	0
	M_1	— 1110	— 1417	— 918	— 1208
	M_2	— 582	0	— 1325	0
Positive Maximalmomente in	l_0	570	580	—	—
	l_1	474	522	1243	1490
Ort derselben in	l_0	13	12	—	—
	l_1	6,5	12	6,5	6,5
Grösste vertikale Schubkräfte in l_0	V_0	— 130	— 81	14	20
	V_l	318	367	126	132
Grösste vertikale Schubkräfte in l_1	V_0	— 291	— 341	— 345	— 427
	V_l	121	75	252	169
Auflagerreaktionen	T_0	130	81	— 14	— 20
	T_1	609	708	471	559
	T_2	121	75	252	169

Hieraus ersieht man u. A., dass über Stütze o auch ein negativer Auflagerdruck entstehen kann, der Träger hat dann dort das Bestreben, sich vom Auflager abzuheben. Bei negativem A kann aber V_x nie Null werden und deshalb existirt im Belastungsfall II kein positives Maximalmoment in l_0.

§ 56. Anwendung continuirlicher Träger.

Im letzten Kapitel wurden einige besondere Fälle angeführt, in denen continuirliche Träger sogar bei kleinen Spannweiten nöthig waren, wir wollen jetzt Einiges über ihre Verwendung im Allgemeinen sagen. Obschon es vielfach Brauch geworden ist, sich ohne Weiteres gegen continuirliche Brückenträger auszusprechen, so beweisen doch fortwährend neue Ausführungen, dass man ihrer nicht entbehren kann. Merkwürdigerweise steht die genannte Construction noch am meisten dort in Gunst, wo die Ingenieure rechnen können, wie in Frankreich und Süddeutschland und nicht da, wo es Regel, dass Ingenieurbureaus von Leuten dirigirt werden, welche zwischen zwei Stühlen und auf keinem fest sitzen.

Die Nachtheile und Vortheile der verschiedenen Constructionen sind in jedem einzeln Fall gegen einander abzuwägen. Folgendes sind Nachtheile der continuirlichen Brückenträger.

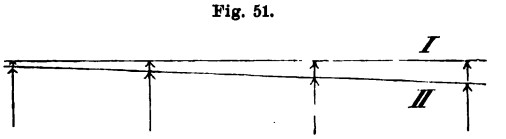
1) Unfreiwillige Aenderungen in der Höhenlage der Stützen und damit der Momente.

2) Wechselnde Beanspruchung des Materials auf Zug und Druck.

Der letzte Nachtheil hat wenig Gewicht. Die Gurtungen erhalten immer Querschnittsformen, welche zum Widerstand gegen Zug und Druck gleich geeignet sind. Ausserdem erlangen beide Arten von Beanspruchung nur an solchen Stellen einige Bedeutung, wo die Querschnitte ohnediess grösser sind, als die Maximalbeanspruchungen verlangen würden (Taf. IV).

Der unter 1) angeführte Nachtheil kann zunächst nur für relative Aenderungen der Stützhöhen eintreten und würde auch, wenn die Stützpunkte aus der Lage I (Fig. 51) in die II gerathen wären, Null sein. Dieser Nachtheil ist daher umsomehr zu fürchten je schlechter der Fundamentboden und je ungleichmässiger er ist. Weil sich ein kleiner Träger unter der gleichen Last P weniger einbiegt als ein grosser, so beträgt die Aenderung der Momente infolge einer gewissen Senkung verhältnissmässig umsomehr, je kleiner der Träger (§ 37.). Bei sehr kleinen Oeffnungen ist sogar der Fall denkbar, dass das Eigengewicht nicht ausreicht, den Träger mit einem gesunkenen Stützpunkt in Berührung zu bringen. Durch veränderte Höhenlage der Stützen können sowohl einzelne Stützenmomente als positive Maximalmomente in den Oeffnungen vergrössert werden (§ 20.). Wenn der Querschnitt den Momenten angepasst ist, dann muss beides als ungünstig gelten, bei konstantem Querschnitt und anfänglich gleichen Stützhöhen nur das erstere. Im zweiten Fall war der Querschnitt in den Oeffnungen stärker als nöthig, und durch die Vergrösserung der positiven also Verringerung der negativen Momente ist eine gleichmässigere im Maximum kleinere Beanspruchung des Trägers eingetreten. Für alle Fälle ist zu bemerken, dass ohne zufällige Senkungen die Momente nie die Werthe erreichen, welche der Dimensionenberechnung continuirlicher Träger zu Grunde gelegt werden. So vollständig alternirende Belastungen der einzeln Oeffnungen mit grösstem und kleinstem Gewicht, wie sie z. B. das Schema Fig. 41 verlangt, kommen gar nicht vor, während die ungünstigste Belastung eines einfachen Trägers nichts Seltenes ist.

Fig. 51.



Die Vortheile der continuirlichen Träger sind folgende.

1) Materialersparniss. Dasselbe ist bedeutend und wird fast immer zwischen 25 und 50% betragen. Man passt bei gleichen

Stützhöhen die Querschnitte den Momenten an, oder gleicht für konstanten Querschnitt die Momente durch Aenderung der Stützhöhen aus. Wenn die Anordnung der Oeffnungen im Voraus bestimmt ist, dann bilden continuirliche Träger das billigste Constructionssystem.

2) Leichte Aufstellung. Diese tritt dann hervor, wenn bei hohen Thalübergängen, Flüssen, lebhaften Verkehrsstrassen die Herstellung von Gerüsten kostspielig oder unthunlich ist. Es wird je ein ganzer Träger für sich zusammengesetzt und über die Stützen weggeschoben.

3) Geringe Dimension der Zwischenstützen. Ist überall da von Bedeutung, wo der Raum für steinerne oder sonst breite Pfeiler fehlt, z. B. bei Ueberbrückungen in Bahnhöfen, wenn zwischen den Geleisen nur ganz schlanke Säulen placirt werden können, in verkehrreichen Strassen (§ 55.) etc.

4) Einfachheit der Construction. Kommt zur Geltung bei sehr schiefen Brücken oder wenn gar die einzeln Oeffnungen mit verschiedenen Fluchtlinien construirt werden müssen. Die continuirlichen Träger laufen über alle Ungleichheiten weg, die schiefen Endträger über den Zwischenstützen (§ 55.) fallen fort und die Anordnung der Querträger kann ohne Rücksicht auf die Letzteren geschehen.

Bei Anwendung continuirlicher Brückenträger beachte man nachstehende Folgen der Theorie.

a) Für beide Gurtungen ist eine Querschnittsform zu wählen, welche zum Widerstand gegen Zug und Druck geeignet ist.

b) Ueber den Stützen sind Stösse der Eisentheile soviel als möglich zu vermeiden.

c) Bei kleinen Spannweiten ist es zweckmässig, die Träger über den Zwischenstützen auf Keile zu legen (§ 55.).

d) Wenn die Stützhöhen zum Zwecke der Momentenausgleichung verschieden sind, so muss jeder Träger als Ganzes auf horizontaler Unterlage zusammengesetzt und über die Stützen weggeschoben oder auf dieselben gesenkt werden (§ 37.).

e) Geschah die Berechnung für gleiche Stützhöhen, so darf jeder Träger in einzeln möglichst grossen Theilen auf die Stützen gebracht und bei genügender weiterer Unterstützung zusammengesetzt werden; es soll aber nie eine Stelle nachträglicher Verbindung über einen Pfeiler treffen.

Würde man unter Nichtbeachtung der letzten Vorschrift die Abschnitte für die einzeln Oeffnungen der Reihe nach aufbringen und dann vernieten, so würde über der Stütze r die Bedingung

$$\tau'_{r-1} = \tau_r$$

auf welcher die Berechnung der Pfeilermomente beruht (§ 6.), unerfüllt sein, indem durch das Eigengewicht eine Ecke der elastigen Linie über r entstände. Man könnte nun zwar die Werthe τ'_{r-1}, τ_r für einfache Träger und Eigengewicht allein berechnen und ihre

durch die nachträgliche Vernietung konstant gewordene Differenz δ_r feststellen. Danach würde am entstandenen continuirlichen Träger für jede Belastung die Bedingung gelten

$$\tau'_{r-1} + \delta_r = \tau_r$$

und könnte die Berechnung der Stützenmomente nach Analogie von § 6. stattfinden. Ein solches Verfahren wird Niemand für praktisch halten.

§ 57. Einfache frei aufliegende Träger. Ungünstigste Stellung eines Systems festverbundener Lastpunkte. Gewöhnlicher Fall.

Eine Anzahl Lastpunkte, welche wir Räder nennen wollen, ist so mit einander verbunden, dass ihre gegenseitigen Entfernungen stets unveränderlich bleiben. Das ganze System rückt nun auf einen Träger, so liegt in jedem Augenblick der Maximalmomentenpunkt μ da, wo

$$V_x = \overset{x}{\Sigma} P - A = 0$$

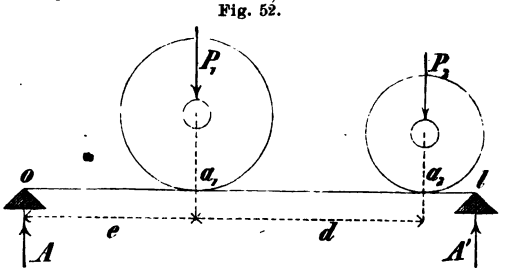
aber μ und M_μ ändern sich mit dem Weiterrücken der Lasten fortwährend und es tritt die Frage heran: bei welcher Laststellung ist M_μ am grössten, welchen Werth (max M_μ) hat es dann und wo ist der Ort desselben?

Am einfachsten gestaltet sich die Aufgabe für 2 Lastpunkte und dieser Fall kommt auch am meisten vor, z. B. bei Schienenträgern, wo gewöhnlich nur 2 Räder zugleich innerhalb der Spannweite Raum haben. Es soll dieser spezielle Fall zunächst für sich betrachtet werden und dann im nächsten Kapitel die allgemeine Untersuchung folgen.

Zwei beliebige Lastpunkte. Ohne Eigengewicht. P_1 sei die grössere, P_2 die kleinere Last, konstante Entfernung d.

Der Punkt $V_x = o$ oder μ muss nothwendig unter einem Rad

Fig. 52.



liegen, der Punkt des grössten M_μ wird also nach § 28. unter P_1 fallen. Allgemein (§ 40.)

$$M_x = Ax - \overset{x}{\Sigma} P\,(x - a)$$

Hierin im vorliegenden Fall

$$A = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P(l-a) = \frac{1}{l} P_1 (l-e) + \frac{1}{l} P_2 (l-e-d)$$
$$= P_1 + P_2 - P_2 \frac{d}{l} - (P_1 + P_2) \frac{e}{l}$$

Solange μ unter P_1, ist daher

$$M_\mu = \left(P_1 + P_2 - P_2 \frac{d}{l}\right) e - (P_1 + P_2) \frac{e^2}{l}$$

und dies Moment wird ein Maximum für $\frac{d M_\mu}{d e} = 0$, wonach Bedingung

$$P_1 + P_2 - P_2 \frac{d}{l} = (P_1 + P_2) \frac{2e}{l}$$

woraus und womit

125
$$e = \frac{P_1 + P_2 - P_2 \frac{d}{l}}{P_1 + P_2} \frac{l}{2} = \mu$$

126
$$\max M_\mu = (P_1 + P_2) \frac{e^2}{l}$$

Für 2 gleiche Lasten $P_1 = P_2 = P$ folgt hiernach

125a
$$e = \frac{l}{2} - \frac{d}{4} = \mu$$

126a
$$\max M_\mu = 2P \frac{e^2}{l}$$

Zwei beliebige Lastpunkte. Mit Eigengewicht. P_1 die grössere, P_2 die kleinere Last. Entfernung d. Eigengewicht pro Längeneinheit p.

In allen praktischen Fällen ist das Eigengewicht gegen die concentrirten Lasten so gering, dass auch jetzt nach M_μ unter einem Rad und max M_μ unter dem schwersten liegt. Wäre dies nicht der Fall oder zweifelhaft, so müsste wie am Schluss von § 58. verfahren werden. — Allgemein (§ 40.)

$$M_x = Ax - \overset{x}{\Sigma} P(x-a)$$

hierin im gegenwärtigen Fall (§ 36.)

$$A = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P(l-a) = P_1 + P_2 - P_2 \frac{d}{l} - (P_1 + P_2) \frac{e}{l} + \tfrac{1}{2} p l$$

und bei $x = e$

$$\overset{x}{\Sigma} P(x-a) = \tfrac{1}{2} p e^2$$

und ebendaselbst

$$M_\mu = \left(P_1 + P_2 - P_2 \frac{d}{l} + \tfrac{1}{2} p l\right) e - (P_1 + P_2 + \tfrac{1}{2} p l) \frac{e^2}{l}$$

Dies Moment erreicht seinen grössten Werth wenn $\frac{d M_\mu}{d e} = 0$, wofür Bedingung

$$P_1 + P_2 - P_2 \frac{d}{l} + \tfrac{1}{2} p l = (P_1 + P_2 + \tfrac{1}{2} p l) \frac{2e}{l}$$

woraus und womit

127 $$e = \frac{P_1 + P_2 - P_2 \frac{d}{l} + \frac{1}{2} p l}{P_1 + P_2 + \frac{1}{2} p l} \frac{l}{2} = \mu$$

128 $$\max M_\mu = (P_1 + P_2 + \tfrac{1}{2} p l) \frac{e^2}{l}$$

Für 2 gleiche Lasten $P_1 = P_2 = P$ nach Reduction

127a $$e = \frac{l}{2} - \frac{P d}{4P + p l} = \mu$$

128a $$\max M_\mu = (2P + \tfrac{1}{2} p l) \frac{e^2}{l}$$

Beispiel.

$P_1 = 5$, $P_2 = 3$, $p = 0,2$ tn, $l = 4$, $d = 1,5$ m.

Mit Berücksichtigung des Eigengewichts erhält man

$$\mu = e = \frac{5 + 3 - 3\frac{1,5}{4} + \frac{1}{2} 0,2 \cdot 4}{5 + 3 + \frac{1}{2} 0,2 \cdot 4} 2 = 1,73^m$$

$$\max M_\mu = (5 + 3 + \tfrac{1}{2} 0,2 \cdot 4) \frac{1,73^2}{4} = 6,28 \text{ mtn}$$

bei Vernachlässigung desselben

$$\mu = e = \frac{5 + 3 - 3\frac{1,5}{4}}{5 + 3} 2 = 1,72^m$$

$$\max M_\mu = (5 + 3) \frac{1,72^2}{4} = 5,92 \text{ mtn}.$$

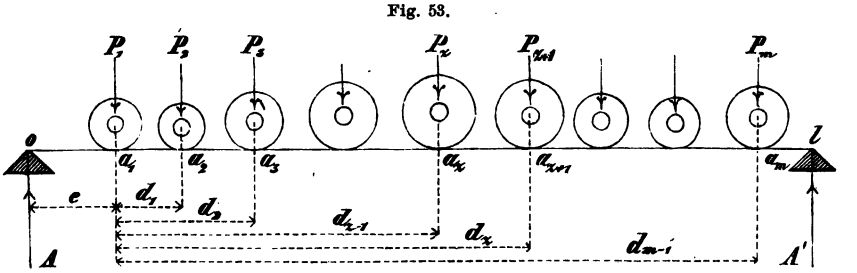
§ 58. Einfache frei aufliegende Träger. Ungünstigste Stellung eines Systems festverbundener Lastpunkte. Weitere Fälle.

m beliebige Lastpunkte in beliebigen Entfernungen. Ohne Eigengewicht. Die Lasten seien $P_1, P_2, \cdots P_m$, die Entfernungen fest, sodass, wenn $a_1 = e$, nothwendig

$$a_2 = e + d_1,\ a_3 = e + d_2,\ \cdots\ a_m = e + d_{m-1}$$

sein und bleiben müssen. In jedem Querschnitt x ist allgemein (§ 40.)

Fig. 53.



$$M_x = A\,x - \sum^{x} P\,(x - a)$$

Der Maximalmomentenpunkt μ muss stets unter einem Lastpunkt liegen, weil nur unter einem solchen $V_x = 0$ werden kann (denn in

$V_x = \overset{x}{\Sigma} P - A$ ist bei bestimmter Belastung A konstant und $\overset{x}{\Sigma} P$ ändert sich zwischen 2 Lastpunkten nicht). Die daselbst wirkende Last sei P_z. Man hat

$$A = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P (l - a) = \overset{l}{\Sigma} P - \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P a$$

und weil

$$\overset{l}{\Sigma} P a = P_1 e + P_2 (e + d_1) + \cdots + P_m (e + d_{m-1})$$

$$A = \overset{l}{\Sigma} P - \frac{e}{l} \overset{l}{\Sigma} P - \frac{1}{l} \overset{\nu=m}{\underset{\nu=2}{\Sigma}} P_\nu d_{\nu-1}$$

also für $x = \mu = e + d_{z-1}$ aus der Formel für M_x

$$M_\mu = e \left(\overset{l}{\Sigma} P - \frac{d_{z-1}}{l} \overset{l}{\Sigma} P - \frac{1}{l} \overset{\nu=m}{\underset{\nu=2}{\Sigma}} P_\nu d_{\nu-1} \right)$$

$$- \frac{e^2}{l} \overset{l}{\Sigma} P + d_{z-1} \left(\overset{l}{\Sigma} P - \frac{1}{l} \overset{\nu=m}{\underset{\nu=2}{\Sigma}} P_\nu d_{\nu-1} \right) - \overset{\mu}{\Sigma} P(\mu - a)$$

Dies Maximalmoment erreicht nun seinen grössten Werth bei derjenigen Laststellung, für welche $\frac{d M_\mu}{d e} = 0$. So lange μ unter P_z liegt, ist $\overset{\mu}{\Sigma} P (\mu - a)$ konstant und die Bedingung für max M_μ lautet

$$\overset{l}{\Sigma} P - \frac{d_{z-1}}{l} \overset{l}{\Sigma} P - \frac{1}{l} \overset{\nu=m}{\underset{\nu=2}{\Sigma}} P_\nu d_{\nu-1} - \frac{2e}{l} \overset{l}{\Sigma} P = 0$$

woraus

129 $$e = \frac{(l - d_{z-1}) \overset{l}{\Sigma} P - \overset{\nu=m}{\underset{\nu=2}{\Sigma}} P_\nu d_{\nu-1}}{2 \overset{l}{\Sigma} P}$$

Um mittelst dieser Formel e berechnen zu können, muss wegen nöthiger Angabe von d_{z-1} zu übersehen sein, unter welcher Last das Moment M_μ den grösstmöglichen Werth, der überhaupt vorkommen kann, annimmt (vergl. unten). Dies ist in allen praktischen Fällen leicht. Wenn e gefunden, dann folgt

$$\mu = e + d_{z-1}$$

und mit diesem Werth

$$\max M_\mu = A \mu - \overset{\mu}{\Sigma} P (\mu - a)$$

worin

$$A = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P (l - a)$$

Dass es nöthig ist, den Lastpunkt P_z zu kennen, unter welchem das grösstmögliche M_μ eintritt, hat seinen guten Grund. Beim Vorrücken der Räder über den Träger kann M_μ der Reihe nach unter verschiedene P fallen. Unter jedem derselben verweilt es eine gewisse Zeit, bleibt auch während dessen nicht konstant und hat an irgend einer Stelle ein Maximum. Von diesen verschiedenen max M_μ wollen wir nur das grösste kennen. Wäre daher ein Zweifel zulässig, unter welchem Lastpunkt das grösste max M_μ eintritt, so müssten die max M_μ für alle diejenigen P bestimmt werden, unter welchen der grösste Werth ver-

muthet werden könnte. Die vorstehenden Formeln gelten für alle diese Maxima und es wären nur die verschiedenen Werthe von d_{s-1} der Reihe nach zu substituiren.

Bei Berücksichtigung eines gleichmässig vertheilten Eigengewichts p kann das gesuchte max M_μ auch zwischen zwei Räder fallen, wenn ihre Entfernung bedeutend und p verhältnissmässig gross ist. Solche zweifelhafte Fälle sind am bessten durch directe nummerische Rechnung zu erledigen (siehe unten Beispiel 3), sie kommen aber praktisch kaum vor.

Manchmal ist noch denkbar, dass durch eine geringere Anzahl Lastpunkte mit der Möglichkeit einer andern Stellung ein grösseres Moment erzeugt werden könnte als mit einer höheren. Auch hier hilft nur Probiren und müssten die max M_μ für beide Fälle berechnet werden.

Durch das Eigengewicht wird der Punkt μ etwas nach der Mitte gerückt, um so mehr je weiter er davon entfernt war und je grösser p ist. Hat man max M_μ für eine Anzahl Lastpunkte ohne Eigengewicht berechnet und will letzteres dann berücksichtigen, so genügt vollkommen, dem erhaltenen Werth $\frac{1}{8} p l^2$ zuzufügen.

Beispiel 1. Eine Engerthsche Tendermaschine fährt auf eine Brücke von 10^m Spannweite, deren Geleise auf den Hauptträgern direct ruhen. Ungünstigste Stellung der Maschine, Ort und Werth des grössten M_μ für einen Träger?

Das grösstmögliche Moment tritt unter dem dritten Rad ein und zwar, wenn ohne Eigengewicht

$$e = \frac{(10 - 2{,}7)\ 26{,}1 - 5{,}9\ (1{,}35 + 2{,}7) - 3{,}5 \cdot 3{,}95 - 4{,}9 \cdot 6{,}75}{2 \cdot 26{,}1} = 2{,}29^m$$

Für diese Laststellung ist

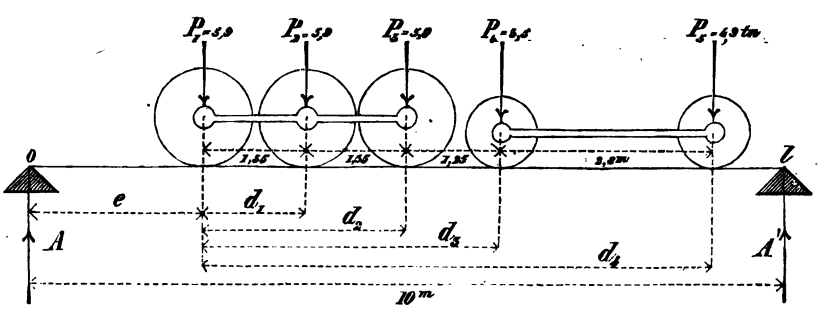
$$A = \tfrac{1}{10}\,[5{,}9\ (7{,}71 + 6{,}36 + 5{,}01) + 3{,}5 \cdot 3{,}76 + 4{,}9 \cdot 0{,}96] = 13{,}04 \text{ tn}$$

und bei

$$\mu = 2{,}29 + 2{,}7 = 4{,}99^m$$

$$\max M_\mu = 13{,}04 \cdot 4{,}99 - 5{,}9\ (2{,}7 + 1{,}35) = 41{,}18 \text{ mtn}$$

Fig. 54.



Wollte man nun das Eigengewicht berücksichtigen, so wäre zu setzen, wenn $p = 0{,}55$ tn pro 1^m

$$\max M_\mu = 41{,}18 + \frac{0{,}55 \cdot 10^2}{8} = 48{,}05 \text{ mtn}$$

$$A = 13{,}04 + \tfrac{1}{2}\,0{,}55 \cdot 10 = 15{,}79 \text{ tn}$$

(Vergl. die genaue Rechnung in Beisp. 2.)

m beliebige Lastpunkte in beliebigen Entfernungen. Mit Eigengewicht. Ausser den Lasten P_1, P_2, $\cdots$ P_m wirke noch eine gleichmässig vertheilte Last von p pro Längeneinheit. Es wird angenommen, dass das grösstmögliche M_μ unter einer concentrirten Last P_z liege, was praktisch immer zulässig (sonst wäre wie im Beisp. 3 zu verfahren). Die Untersuchung verläuft dann ganz wie oben, nur haben die Summenausdrücke andre Werthe, die aus § 36. folgen.

$$M_x = A\,x - \sum_1^x P\,(x-a)$$

$$A = \frac{1}{l}\sum_1^l P\,(l-a) = \sum_1^m P - \frac{e}{l}\sum_1^m P - \frac{1}{l}\sum_{\nu=2}^{\nu=m} P_\nu\, d_{\nu-1} + \tfrac{1}{2}\,p\,l$$

Für $x = \mu = e + d_{z-1}$

$$\sum_1^x P\,(x-a) = \sum_1^z P\,(\mu-a) + \tfrac{1}{2}\,p\,\mu^2$$

und mit diesen Werthen aus der Formel für M_x

$$M_\mu = e\left(\sum_1^m P - \frac{d_{z-1}}{l}\sum_1^m P - \frac{1}{l}\sum_{\nu=2}^{\nu=m} P_\nu\, d_{\nu-1} + \tfrac{1}{2}\,p\,l - p\,d_{z-1}\right)$$
$$- e^2\left(\frac{1}{l}\sum_1^m P + \tfrac{1}{2}\,p\right) + \text{Rest}$$

Alles im Rest enthaltene ist in Bezug auf e konstant, sodass die Bedingung $\frac{d\,M_\mu}{d\,e} = 0$ für das Maximum von M_μ:

$$\sum_1^m P - \frac{d_{z-1}}{l}\sum_1^m P - \frac{1}{l}\sum_{\nu=2}^{\nu=m} P_\nu d_{\nu-1} + \tfrac{1}{2}pl - p\,d_{z-1} - 2e\left(\frac{1}{l}\sum_1^m P + \tfrac{1}{2}p\right) = 0$$

woraus

130
$$e = \frac{(l-d_{z-1})\sum_1^m P - \sum_{\nu=2}^{\nu=m} P_\nu\, d_{\nu-1} + p\,l\,(\frac{1}{2}\,l - d_{z-1})}{2\sum_1^m P + p\,l}$$

alsdann folgt

$$\mu = e + d_{z-1}$$

und damit

$$\max M_\mu = A\,\mu - \sum_1^{z-1} P\,(\mu-a) - \tfrac{1}{2}\,p\,\mu^2$$

worin

$$A = \frac{1}{l}\sum_1^m P\,(l-a) + \tfrac{1}{2}\,p\,l$$

Beispiel 2. Träger und Belastung wie im Beispiel 1. Eigengewicht $p = 0{,}55$ tn pro laufenden Meter. Berechnung mittelst der genauen Formeln,

$$e = \frac{119{,}7 + 0{,}55\cdot 10\,(5 - 2{,}7)}{52{,}2 + 0{,}55\cdot 10} = 2{,}3^m$$

Bei dieser Laststellung

$A = \frac{1}{10}[5{,}9(7{,}7 + 6{,}35 + 5) + 3{,}5\cdot 3{,}75 + 4{,}9\cdot 0{,}95] + \frac{1}{2}0{,}55\cdot 10 = 15{,}76$ tn

$\mu = 2{,}3 + 2{,}7 = 5^m$

$\max M_\mu = 15{,}76 \cdot 5 - 5{,}9\,(2{,}7 + 1{,}35) - \frac{1}{2}\,0{,}55 \cdot 5^2 = 48{,}04\,\text{mtn}$

m gleiche Lastpunkte in gleichen Entfernungen. m ungerade. Jede Last gleich P, Entfernung zweier aufeinander folgenden Lasten δ, Anzahl $m = 2n + 1$. Das grösstmögliche M_μ liegt unter dem mittleren P, $d_{z-1} = n\delta$

Ohne Eigengewicht. Nach 129

$$e = \frac{(l - n\delta)\,mP - (1 + 2 \cdots + 2n)\,\delta P}{2mP}$$

und weil

$$1 + 2 + \cdots + 2n = \frac{2n\,(2n+1)}{2} = nm$$

$$e = \frac{l}{2} - n\delta$$

$$\mu = e + n\delta = \frac{l}{2}$$

$$A = \frac{2n+1}{2}\,P$$

und durch Substitution aller dieser Werthe

131 $$\max M_\mu = [(2n + 1)\,l - 2n\,(n + 1)\delta]\,\frac{P}{4}$$

Mit Eigengewicht. Nach 130

$$e = \frac{(l - n\delta)\,mP - nm\delta P + pl\,(\frac{1}{2}l - n\delta)}{2mP + pl}$$

und durch directe Division

$$e = \frac{l}{2} - n\delta$$

alsdann

$$\mu = e + n\delta = \frac{l}{2}$$

und mit diesen Werthen

132 $$\max M_\mu = [(2n + 1)\,l - 2n\,(n + 1)\delta]\,\frac{P}{4} + \frac{1}{2}\,pl^2$$

was nach 131 selbstverständlich.

m gleiche Lastpunkte in gleichen Entfernungen. m gerade. Jede Last gleich P, Entfernung zweier aufeinander folgenden Lasten δ, Anzahl $2n$. Das grösstmögliche M_μ liegt unter einem der zwei mittlern P (es tritt je nach der Laststellung unter jedem dieser beiden ein gleiches $\max M_\mu$ ein), $d_{z-1} = (n-1)\,\delta$.

Ohne Eigengewicht. Nach 129

$$e = \frac{(l - (n-1)\,\delta)\,mP - (1 + 2 + \cdots + 2n-1)\,\delta P}{2mP}$$

und durch Reduction, weil

$$1 + 2 + \cdots + 2n - 1 = \frac{(2n-1)\,2n}{2} = m\,\frac{2n-1}{2}$$

133 $$e = \frac{l}{2} - \frac{4n-3}{4}\,\delta$$

Für diese Laststellung findet sich

$$A = \frac{1}{l} \overset{l}{\Sigma} P\,(l-a) = nP\left(1 - \frac{\delta}{2l}\right)$$

und damit bei

$$\mu = e + d_{s-1} = \frac{l}{2} - \frac{\delta}{4}$$

134 $$\max M_\mu = \left[\left(1 - \frac{\delta}{2l}\right)(2l - \delta) - 2\,(n-1)\,\delta\right]\frac{nP}{4}$$

Mit Eigengewicht. Nach 130

$$e = \frac{(l-(n-1)\,\delta)\,mP - \frac{2n-1}{2}\,m\delta P + pl\,(\frac{1}{2}\,l - (n-1)\,\delta)}{2mP + pl}$$

und durch Reduction

135 $$e = \frac{l}{2} - (n-1)\,\delta - \frac{m\delta P}{4mP + 2pl}$$

also

$$\mu = \frac{l}{2} - \frac{m\delta P}{4mP + 2pl}$$

Man berechnet nun A aus

$$A = \frac{1}{l} \overset{m}{\underset{1}{\Sigma}} P\,(l-a) + \tfrac{1}{2}\,pl$$

und es wird dann

$$\max M_\mu = A\mu - \overset{s-1}{\underset{1}{\Sigma}} P\,(\mu-a) - \tfrac{1}{2}\,p\mu^2$$

Beispiel 3. Träger und Belastung wie in Beispiel 2. Directe nummerische Berechnung.

Bei jeder Laststellung ist

$$A = \tfrac{1}{10}\,[5{,}9\,(10-e) + 5{,}9\,(8{,}65-e) + 5{,}9\,(7{,}30-e) + 3{,}5\,(6{,}05-e) + 4{,}9\,(3{,}25-e)] + \tfrac{1}{2}\,0{,}55 \cdot 10 = 21{,}77 - 2{,}61\,e$$

Wenn M_μ unter dem dritten Rad eintritt, dann ist es ausgedrückt durch

$$M_\mu = (21{,}77 - 2{,}61\,e)\,(e + 2{,}7) - 5{,}9\,(2{,}7 + 1{,}35) - \tfrac{1}{2}\,0{,}55\,(e+2{,}7)^2$$
$$= 32{,}89 + 13{,}24\,e - 2{,}88\,e^2$$

und sein Werth ist ein Maximum für

$$\frac{dM_\mu}{de} = 13{,}24 - 5{,}76\,e = 0$$

woraus

$$e = 2{,}30^{\mathrm{m}}$$

alsdann ist bei

$$\mu = 2{,}30 + 2{,}7 = 5^{\mathrm{m}}$$

$$\max M_\mu = 32{,}89 + 13{,}24 \cdot 2{,}3 - 2{,}88 \cdot 2{,}3^2 = 48{,}04 \text{ mtn}$$

Hätte man zweifeln können, ob das grösstmögliche M_μ unter P_3 eintreffe, so wäre in folgender Weise weiter zu rechnen gewesen.

Solange M_μ unter dem zweiten Rade liegt, ist es ausgedrückt

$$M_\mu = (21{,}77 - 2{,}61e)(e + 1{,}35) - 5{,}9 \cdot 1{,}35 - \tfrac{1}{2}\,0{,}55\,(e + 1.35)^2$$
$$= 20{,}93 + 17{,}51\,e - 2{,}88\,e^2$$

und sein Maximum erreicht es für

$$\frac{d\,M_\mu}{de} = 17{,}51 - 5{,}76\,e = 0$$

Hierbei ist

$$e = 3{,}04^{\mathrm{m}}$$

$$\mu = 3{,}04 + 1{,}35 = 4{,}39^{\mathrm{m}}$$

$$\max M_\mu = 20{,}93 + 17{,}51 \cdot 3{,}04 - 2{,}88 \cdot 3{,}04^2 = 47{,}56 \text{ mtn}$$

Dieselben Resultate folgen natürlich auch aus unsern Formeln, wenn $d_{s-1} = 1{,}35$ gesetzt wird.

Zwischen dem zweiten und dritten Rade wäre M_μ ausgedrückt

$$M_\mu = (21{,}77 - 2{,}61e)\,\mu - 5{,}9\,(\mu - e) - 5{,}9\,(\mu - e - 1{,}35) - \tfrac{1}{2}0{,}55\,\mu^2$$

aber weil bei $x = \mu$

$$V_x = 21{,}77 - 2{,}61\,e - 2 \cdot 5{,}9 - 0{,}55\mu = 0$$

so folgt

$$e = \frac{9{,}97 - 0{,}55\,\mu}{2{,}61}$$

und durch Substitution und Reduction

$$M_\mu = 53{,}02 - 2{,}48\,\mu + 0{,}27\,\mu^2$$

Dieses Moment erreicht sein Maximum für

$$\frac{d\,M_\mu}{d\,\mu} = -2{,}48 + 0{,}54\,\mu = 0$$

woraus

$$\mu = 4{,}51^{\mathrm{m}}$$

und hiermit wird

$$\max M_\mu = 47{,}34 \text{ mtn}$$

Werden also die 5 Lastpunkte so auf den Träger gestellt, dass P_5 über $a_5 = l$ steht und rücken dieselben dann über den Träger weg, so liegt M_μ der Reihe nach

unter P_2, zwischen P_2 und P_3, unter P_3

die respectiven Maxima treten ein, wenn das vorderste Rad P_1 bis

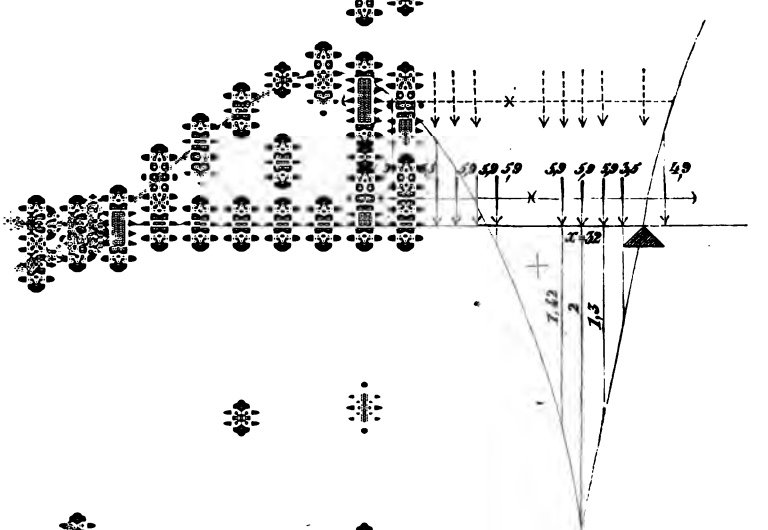
$$e = 3{,}04\,, \qquad e = 2{,}80\,, \qquad e = 2{,}30^{\mathrm{m}}$$

vorgerückt ist; sie betragen bei

$$\mu = 4{,}39\,, \qquad \mu = 4{,}51\,, \qquad \mu = 5^{\mathrm{m}}$$
$$\max M_\mu = 47{,}56, \quad \max M_\mu = 47{,}34, \quad \max M_\mu = 48{,}04 \text{ mtn}$$

e Stellung eines Systems fest-
tpunkte.

, 58. vorgenommenen, sind für
aber kein Interesse, noch weiter
solche Aufgaben bei Trägern
men. Man käme auch sonst
erechnung zum Ziel, — ähnlich
ntinuirliche Träger die Stützen-
ckt zu substituiren wären.
die ungünstigste Stellung eines
Bezug auf einen bestimmten
räger nach § 28. immer leicht
e Träger nach §§. 27., 28., und
geknüpft|]



, 58. die Abscisse irgend eines
enden analytischen Lösung hat
kte, alle Arten Träger, positive
nes Mittel in der Influenzcurve
f. II), die zu diesem Zweck nur
te festgelegt zu werden braucht.
grösste positive Moment, wel-
in § 46. angenommenen con-

tinuirlichen Trägers von 5 Oeffnungen durch 2 Engerthsche Tendermaschinen erzeugt werden kann, so ersieht man sehr rasch, dass es die in Fig. 55 mit vollen Strichen verzeichnete ist; sie liefert

$$M_x = 5{,}9\,(2 + 1{,}42 + 1{,}3 + 0{,}12 - 0{,}14 - 0{,}38)$$
$$+ 3{,}5\,(0{,}62 - 0{,}56) - 4{,}9\,(0{,}85 + 0{,}56) = + 18{,}8 \text{ mtn}$$

Die mit punktirten Linien angedeutete hätte zur Folge gehabt

$$M_x = 5{,}9\,(2 + 1{,}42 + 0{,}9 - 0{,}14 - 0{,}38 - 0{,}59)$$
$$+ 3{,}5\,(1{,}31 - 0{,}73) - 4{,}9 \cdot 0{,}94 \qquad = + 16{,}4 \text{ mtn}$$

Jede andre Laststellung würde ebenfalls weniger ergeben haben. Man erkennt auch, dass mittelst einer einzeln Maschine ein grösseres positives Moment zu erzeugen möglich gewesen wäre. Um das grösste negative Moment im genannten Querschnitt zu erhalten, müssten die Maschinen in der Oeffnung l_4 um den Influenzpunkt α_4' placirt werden, wobei 2 Maschinen wirksamer als eine.

Die Influenzcurven würden dann mit Vortheil zur Momentenbestimmung überhaupt Verwendung finden, wenn man in gewissen Querschnitten die Momente für eine grosse Anzahl verschiedener Belastungen durch concentrirte Lasten abzuleiten hätte. Ist die Curve für einen bestimmten Querschnitt x aufgetragen, so können die Momente M_x für alle Arten Vertheilungen concentrirter Lasten wie oben direct angeschrieben werden.

Anhang.

§ 60. Integrationen.

Im Verlauf der entwickelten Theorie traten bestimmte Integrale auf, welche zwischen ihren Grenzen verschiedenen Gesetzen folgen und deren Werthbestimmung noch zu zeigen übrig bleibt.

Erste Gruppe.

Unter der Annahme, dass zwischen o und x bei $a_1, a_2, \cdots a_z$ die Kräfte $P_1, P_2, \cdots P_z$ angreifen, sind zu bestimmen:

$$\int_0^x \overset{x}{\Sigma} P\,dx$$

$$\int_0^x \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)\,dx$$

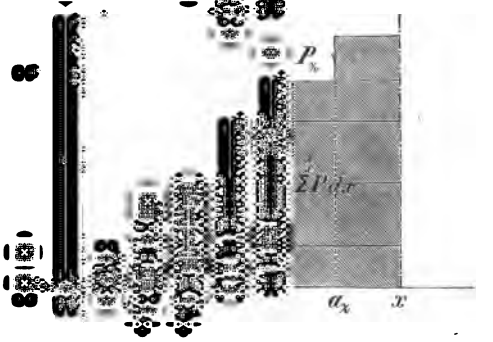
$$\int_0^x \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^2\,dx$$

[illegible] Abschnitt.

[illegible] Integral; es ist

$$\int_0^x \Sigma P dx = \int_0^{a_2} P_1 dx + \cdots + \int_{a_z}^x \Sigma P dx$$

[illegible] Constant, sodass



$$= P_1 a_2 + (P_1 + P_2)(a_3 - a_2) + \cdots + (P_1 + P_2 + \cdots + P_z)(x - a_z)$$

$$= P_1 x + P_2 (x - a_2) + \cdots + P_z (x - a_z)$$

[illegible]

$$\int \Sigma P dx = \Sigma P (x - a)$$

[illegible] werden

$$\int \Sigma P x dx = \int P x dx - \int_0^x \Sigma P a dx$$

[illegible] in ähnlicher Weise wie vorstehend

$$\int \Sigma P x dx = \frac{1}{2} P x^2 - \frac{1}{2} \Sigma P a^2$$

$$\int \Sigma P a x dx = \Sigma P a x + \Sigma P a^2$$

$$\int \Sigma P (x - a)^2 dx = \frac{1}{2} \Sigma P (x - a)^2$$

[illegible] es [illegible] folgt

$$\int_0^x \Sigma P (x - a)^2 dx = \int_0^x P x^2 dx - 2 \int_0^x \Sigma P a x dx + \int_0^x \Sigma P a^2 dx$$

[illegible] Integrale

$$\int_0^x x^2 \overset{x}{\Sigma} P\,dx = \tfrac{1}{3} \overset{x}{\Sigma} P x^3 - \tfrac{1}{3} \overset{x}{\Sigma} P a^3$$

$$-2\int_0^x x \overset{x}{\Sigma} P a\,dx = -\overset{x}{\Sigma} P a x^2 + \overset{x}{\Sigma} P a^3$$

$$\int_0^x \overset{x}{\Sigma} P a^2\,dx = \overset{x}{\Sigma} P a^2 x - \overset{x}{\Sigma} P a^3$$

---

3 $$\int_0^x \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^2\,dx = \tfrac{1}{3} \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^3$$

Beiläufig sei bemerkt, dass man so fortfahrend ganz allgemein erhält

4 $$\int_0^x \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^{n-1}\,dx = \frac{1}{n} \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^n$$

womit auch der Werth des $n$fachen Integrals

5 $$\int_0^x dx \int_0^x dx \cdots \int_0^x \overset{x}{\Sigma} P\,dx = \frac{1}{n!} \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)^n$$

bestimmt ist.

Zweite Gruppe.

Mit der Bedingung, dass Θ zwischen o und x nicht überall gleich ist, sondern nur auf gewissen Strecken e_1, $e_2 - e_1$, $e_3 - e_2$, $\cdots x - e_s$ konstante Werthe Θ_0, Θ_1, Θ_2, $\cdots \Theta_s$ hat, sind abzuleiten

$$\int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx$$

$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx$$

worin

$$M_x = M + Ax - \overset{x}{\Sigma} P\,(x-a)$$

In diesem letzten Ausdruck sind M und A konstant, der Summenausdruck bezieht sich, wie in der ersten Integralgruppe, auf die Kräfte zwischen o und x.

Erste Methode. Man hat sofort

$$\int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{\Theta_0}\int_0^{e_1} M_x\,dx + \frac{1}{\Theta_1}\int_{e_1}^{e_2} M_x\,dx + \cdots + \frac{1}{\Theta_s}\int_{e_s}^{x} M_x\,dx$$

und weil allgemein

$$\frac{1}{\Theta_\nu}\int_{e_\nu}^{e_{\nu+1}} M_x\,dx = \frac{1}{\Theta_\nu}\int_0^{e_{\nu+1}} M_x\,dx - \frac{1}{\Theta_\nu}\int_0^{e_\nu} M_x\,dx$$

so wird

$$6a \qquad \int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{\Theta_s}\int_0^x M_x\,dx + \sum_{\nu=1}^{\nu=s}\left(\frac{1}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{1}{\Theta_\nu}\right)\int_0^{e_\nu} M_x\,dx$$

Durch Integration des Ausdrucks für M_x erhält man mit Rücksicht auf 2)

$$\int_0^x M_x\,dx = Mx + \tfrac{1}{2}Ax^2 - \tfrac{1}{2}\sum^x P\,(x-a)^2$$

sodass der gesuchte Werth unsers ersten Integrals

$$6 \qquad \int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{2\Theta_s}\left[2Mx + Ax^2 - \sum^x P\,(x-a)^2\right]$$
$$+ \frac{1}{2\Theta_s}\sum_{\nu=1}^{\nu=s}\left(\frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_s}{\Theta_\nu}\right)\left[2Me_\nu + Ae_\nu^2 - \sum^{e_\nu} P\,(e_\nu - a)^2\right]$$

Für das zu bestimmende Doppelintegral folgt aus 6a)

$$7a \qquad \int_0^x dx\int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{\Theta_s}\int_0^x dx\int_0^x M_x\,dx + \sum_{\nu=1}^{\nu=s}\left(\frac{1}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{1}{\Theta_\nu}\right)\int_0^x dx\int_0^{e_\nu} M_x\,dx$$

Weil nun mit Rücksicht auf 3)

$$\int_0^x dx\int_0^x M_x\,dx = \tfrac{1}{2}Mx^2 + \tfrac{1}{6}Ax^3 - \tfrac{1}{6}\sum^x P\,(x-a)^3$$

und indem jedes einzelne Integral der Summe von Integralen

$$\int_0^x dx\int_0^{e_\nu} M_x\,dx = \int_0^{e_\nu} dx\int_0^{e_\nu} M_x\,dx + \int_{e_\nu}^x dx\int_0^{e_\nu} M_x\,dx$$
$$= \tfrac{1}{2}Me_\nu^2 + \tfrac{1}{6}Ae_\nu^3 - \tfrac{1}{6}\sum^{e_\nu} P\,(e_\nu - a)^3$$
$$+ \tfrac{1}{2}(x-e_\nu)\left[2Me_\nu + Ae_\nu^2 - \sum^{e_\nu} P\,(e_\nu - a)^2\right]$$

so ergibt sich der Werth des ganzen Integrals

$$7 \qquad \int_0^x dx\int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\,dx = \frac{1}{6\Theta_s}\left[3Mx^2 + Ax^3 - \sum^x P(x-a)^3\right]$$
$$+ \frac{1}{6\Theta_s}\sum_{\nu=1}^{\nu=s}\left(\frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_s}{\Theta_\nu}\right)\left[3Me_\nu\,(2x-e_\nu) + Ae_\nu^2\,(3x-2e_\nu)\right.$$
$$\left. - \sum^{e_\nu} P\,(e_\nu-a)^3 - 3(x-e_\nu)\sum^{e_\nu} P(e_\nu-a)^2\right]$$

Zweite Methode. Wir wollen noch eine weitere Ableitung des Doppelintegrals geben, die zwar etwas umständlicher, aber vielleicht doch besser zu verfolgen ist wie die erste.

Man setze vorübergehend in 6) zur Abkürzung

$$\frac{1}{2\Theta_s}\left(\frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_s}{\Theta_\nu}\right)\left[2Me_\nu + Ae_\nu^2 - \sum^{e_\nu} P\,(e_\nu-a)^2\right] = a_\nu$$

ferner

$$\frac{1}{2\Theta_s}\sum_{\nu=1}^{\nu=\nu}\left(\frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}}-\frac{\Theta_s}{\Theta_\nu}\right)\left[2Me_\nu+Ae_\nu^2-\overset{e_\nu}{\Sigma}P(e_\nu-a)^2\right]=A_\nu$$

dann ist also

$$A_\nu=a_1+a_2+\cdots+a_\nu$$

Durch Zerlegen in Partialintegrale wird

$$\int_0^x dx\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx=\int_0^{e_1}dx\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx+\int_{e_1}^{e_2}dx\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx+\cdots+\int_{e_s}^x dx\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx$$

Hierin ist nach 6) ausgedrückt

von o bis e_1 $\quad\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx=\frac{1}{2\Theta_0}\left[2Mx+Ax^2-\overset{x}{\Sigma}P(x-a)^2\right]$

„ e_1 „ e_2 $\quad\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx=\frac{1}{2\Theta_1}\left[2Mx+Ax^2-\overset{x}{\Sigma}P(x-a)^2\right]+A_1$

— —

„ e_s „ x $\quad\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx=\frac{1}{2\Theta_s}\left[2Mx+Ax^2-\overset{x}{\Sigma}P(x-a)^2\right]+A_s$

worin $A_1, A_2, \cdots A_s$ konstant. Es ergeben sich daher

$$\int_0^{e_\nu}dx\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx=\frac{1}{6\Theta_0}\left[3Me_1^2+Ae_1^3-\overset{e_1}{\Sigma}P(e_1-a)^3\right]$$

$$\int_{e_1}^{e_2}dx\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx=\frac{1}{6\Theta_1}\left[3Me_2^2+Ae_2^3-\overset{e_2}{\Sigma}P(e_2-a)^3\right]$$

$$-\frac{1}{6\Theta_1}\left[3Me_1^2+Ae_1^3-\overset{e_1}{\Sigma}P(e_1-a)^3\right]+A_1(e_2-e_1)$$

— —

$$\int_{e_s}^x dx\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx=\frac{1}{6\Theta_s}\left[3Mx^2+Ax^3-\overset{x}{\Sigma}P(x-a)^3\right]$$

$$-\frac{1}{6\Theta_s}\left[3Me_s^2+Ae_s^3-\overset{e_s}{\Sigma}P(e_s-a)^3\right]+A_s(x-e_s)$$

und folgt mit diesen Werthen das ganze Integral

$$\int_0^x dx\int_0^x\frac{M_x}{\Theta}dx=\frac{1}{6\Theta_s}\left[3Mx^2+Ax^3-\overset{x}{\Sigma}P(x-a)^3\right]$$

$$+\frac{1}{6\Theta_s}\sum_{\nu=1}^{\nu=s}\left(\frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}}-\frac{\Theta_s}{\Theta_\nu}\right)\left[3Me_\nu^2+Ae_\nu^3-\overset{e_\nu}{\Sigma}P(e_\nu-a)^3\right]+\sum_{\nu=1}^{\nu=s}A_\nu(x-e_\nu)$$

Nun ist aber

$$A_1 = a_1$$
$$A_2 = a_1 + a_2$$
$$- - - - -$$
$$A_s = a_1 + a_2 + \cdots + a_s$$

und damit

$$\sum_{\nu=1}^{\nu=s} A_\nu (x - e_\nu) = \sum_{\nu=1}^{\nu=s} a_\nu (x - e_\nu)$$

Nach Substitution des Werthes von a_ν und Vereinigung der beiden Summen im vorstehenden Ausdruck des Doppelintegrals erhält man wie oben

7
$$\int_0^x dx \int_0^x \frac{M_x}{\Theta}\, dx = \frac{1}{6\Theta_s}\left[3Mx^2 + Ax^3 - \sum^x P (x-a)^3\right]$$
$$- \frac{1}{6\Theta_s} \sum_{\nu=1}^{\nu=s} \left(\frac{\Theta_s}{\Theta_{\nu-1}} - \frac{\Theta_s}{\Theta_\nu}\right)\left[3Me_\nu (2x - e_\nu) + Ae_\nu^2 (3x - 2e_\nu)\right.$$
$$\left. - \sum^{e_\nu} P (e_\nu - a)^3 - 3(x - e_\nu) \sum^{e_\nu} P (e_\nu - a)^2 \right]$$

Nachweis angewandter Ausdrücke.

	Seite		Seite
Achse, neutrale.	1	λ-System der Stütze r.	37
Aussenbelastung.	52	Maximalmoment, positives.	11
Aussenöffnungen.	53	Maximalmoment, grösstes positives.	157
Bedingungssystem der λ für die Stütze r.	37	Maximalmomentenpunkt.	11
Belastung, combinirte.	73	Mittelpunkte von Zug und Druck.	13
Belastung, ungünstigste.	64	Moment der innern Kräfte.	2
Belastungsart.	67	Oeffnung.	3
Belastungsfall.	67	Pfeiler.	3
Druckkraft, grösste spezifische.	17	Spannungstrajectorien.	19
Einsenkung, grösste.	21	Schicht, neutrale.	1
Grenzpunkt der positiven und negativen Beitragsstrecken.	56	Schubkraft, spezifische.	15
Inflexionspunkte, feste.	52	Schubkraft, grösste spezifische.	15
Inflexionspunkte, laufende.	52	Schubkraft, horizontale.	12
Influenzpunkte, feste.	41	Schubkraft, spezifische horizontale.	12
Influenzpunkte, laufende.	58	Schubkraft, vertikale.	2
Influenzcurve.	50	Schubkraft, spezifische vertikale.	12
Kraft, scheerende.	2	Spannungen, schiefe.	14
Kräfte, äussere.	1	Träger, continuirlicher.	3
Kräfte, innere.	1	Träger, einfacher.	3
Lasten.	3	Trägheitsmoment.	2
Lasten, concentrirte.	3	Trajectorie des grössten Zugs.	18
Lasten, vertheilte.	3	Trajectorie des grössten Drucks.	18
Lasten, gesetzmässig vertheilte.	70	Trajectorie des grössten Schubs.	19
Lasten, gleichmässig vertheilte.	71	Widerlager.	3
Lastpunkte, fest verbundene.	157	Zugkraft, grösste spezifische.	17
Linie, elastige.	1	Zug- oder Druckkraft, spezifische.	15
		Zug- oder Druckkraft, grösste spezifische.	15

Erklärung der Buchstabenbezeichnungen,

welche in mehr als einem Paragraphen vorkommen und Angabe, wo sie zum erstenmal auftreten.

A, A' Theile der Reaktionen zweier eine Oeffnung l begränzender Stützen, welche sich mit der Belastung in dieser Oeffnung ins Gleichgewicht setzen. Seite 4, mit Index S. 8.

a, a' Zunahmen derselben durch eine neue Last P innerhalb l. Mit Index S. 50.

$a_1, a_2, \cdots a_z, \cdots a_m$ Entfernungen der Lasten $P_1, P_2, \cdots P_z, \cdots P_m$ in der Oeffnung l von der linken Stütze. S. 4.

$\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ Entfernung der äussersten gezogenen bezw. gedrückten Faser von der neutralen Schicht. S. 2.

B, B' Quotienten, für jede Oeffnung l_m bestimmt durch die Formeln 69. S. 39.

(B), (B') Quotienten nach den Formeln 73. S. 39.

c, c' Entfernung zweier eine Oeffnung l begränzender Stützpunkte von der Abscissenachse. S. 4, mit Index S. 8.

E Elastizitätsmodul. S. 2.

e Entfernung des ersten eines Systems festverbundener Lastpunkte von der linken Stütze. S. 157.

$e_1, e_2, \cdots e_s, \cdots e_l$ Abscissen der Staffeln eines Trägers mit sprungweise veränderlichem Querschnitt. S. 22.

$\mathfrak{E}$ Grösste Einsenkung. S. 21.

$\mathfrak{e}$ Ort der grössten Einsenkung. S. 21.

$\mathfrak{F}$ Beliebiger Faserquerschnitt. S. 2.

G_η Spezifische horizontale Zug- oder Druckkraft in Entfernung η von der neutralen Schicht auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ daselbst. S. 15.

g Grenzpunkt zweier nach verschiedenen Gesetzen vertheilter Lasten. S. 70.

g_x, g_x' Grenzpunkte der positiven und negativen Beitragsstrecken für einen Querschnitt x, je nachdem x zwischen o und I oder zwischen I' und l liegt. S. 56.

H_η Spezifische horizontale Schubkraft in Entfernung η von der neutralen Schicht auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ daselbst. S. 12.

h Aggregat nach Formel 99. S. 57.

$\mathfrak{H}$ Entfernung der Mittelpunkte von Zug und Druck. S. 13.

$\mathfrak{H}_0$ Entfernung der Gurtungsschwerpunkte. S. 14.

I, I' Feste Inflexionspunkte, für jede Oeffnung l_m bestimmt durch die Formeln 95, 96. S. 51.

I_a, I_a' Laufende Inflexionspunkte für den Angriffspunkt a. S. 52.

K_ν, K_ν' Aggregate nach den Formeln 50. S. 24.

k Aggregat nach Formel 99. S. 57.

L', L'', L''' Aggregate nach den Formeln 49. S. 24.

l Länge irgend einer Trägeröffnung. S. 3 mit Index S. 8.

M, M' Momente über den eine Oeffnung l begränzenden Stützen. S. 4, mit Index S. 8.

M_x Moment der innern Kräfte im Querschnitt x, welches dem Moment der äusseren Kräfte in Bezug auf denselben das Gleichgewicht hält. S. 2.

M_μ Positives Maximalmoment (oder negatives Minimalmoment) innerhalb einer Oeffnung l. S. 11.

max M_μ Grösstes positives Maximalmoment. S. 157.

$m_0, m_1, \cdots m_s, \cdots m_{n+1}$ Aenderungen der Stützenmomente $M_0, M_1, \cdots M_s, \cdots M_{n+1}$ durch eine in beliebiger Oeffnung l_s neu hinzugetretene Last P. S. 44.

m_x Aenderung des Moments M_x durch diese Last. S. 45.

$P_1, P_2, \cdots P_s, \cdots P_m$ Concentrirte Lasten oder Lastelemente innerhalb einer betrachteten Oeffnung l. S. 4.

p Gleichmässig vertheiltes Eigengewicht pro Längeneinheit. S. 87.

Q Summe aller horizontalen Zugkräfte gleich Summe aller horizontalen Druckkräfte eines Querschnitts. S. 13.

q Gleichmässig vertheilte Totalbelastung pro Längeneinheit. S. 86.

$R_0, R_1, \cdots R_r, \cdots R_{n+1}$ Aggregate nach den Formeln 57—59. S. 35.

S, S' horizontale Zugkraft bezw. Druckkraft auf Fasern vom Querschnitt 1 in Entfernung 1 von der neutralen Schicht. S. 1.

S_η, S_η' horizontale Zugkraft bezw. Druckkraft auf Fasern vom Querschnitt 1 in Entfernung η von der neutralen Schicht. S. 1.

s Länge der Faserabschnitte zwischen zwei ∞ benachbarten Querschnitten. S. 1.

$T_0, T_1, T_2, \cdots T_{n+1}$ Reaktionen der Stützen 0, 1, 2, $\cdots\cdots n+1$. S. 9.

$t_0, t_1, t_2, \cdots\cdots t_{n+1}$ Aenderungen dieser Reaktionen durch eine in beliebiger Oeffnung l_s neu hinzugetretene Last P. S. 47.

u, u' Vertheilte Belastungen pro Längeneinheit innerhalb einer Oeffnung l von o bis g bezw. von g bis l. S. 70.

V_x Vertikale Schubkraft im Querschnitt x. S. 5.

v_x Aenderung derselben durch eine in beliebiger Oeffnung l_s neu hinzugetretene Last P. S. 46.

v_m Constante Aenderung der vertikalen Schubkraft V_x in allen Querschnitten jeder bestimmten von l_s verschiedenen Oeffnung l_m, durch Hinzutreten der neuen Last P in l_s. S. 46.

v_s, v_s' Constante Aenderungen der vertikalen Schubkraft V_x in allen Querschnitten von P bezw. nach P in l_s, durch Hinzutreten der neuen Last P in dieser Oeffnung. S. 50.

w Winkelbezeichnung. S. 10.

X_η Spezifische Zug- oder Druckkraft in irgend welcher Richtung, in Entfernung η von der neutralen Schicht, auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ daselbst. S. 15.

max X_η Grösste spezifische Zug- oder Druckkraft (nur dem nummerischen Werthe nach, gleichgültig ob Zug oder Druck, also grösste rückwirkende

Kraft) in Entfernung η von der neutralen Schicht, auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ daselbst. S. 15.

max zug X_η Grösste spezifische Zugkraft in Entfernung η von der neutralen Schicht, auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ daselbst. S. 17.

max druck X_η Grösste spezifische Druckkraft in Entfernung η von der neutralen Schicht, auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ daselbst. S. 4.

x Abscissenbezeichnung. S. 4.

Y_η Spezifische Schubkraft in irgend welcher Richtung, in Entfernung η von der neutralen Schicht, auf die ganze Breite $\mathfrak{b}$ daselbst. S. 15.

max Y_η Grösste spezifische Schubkraft in Entfernung η von der neutralen Schicht und für die ganze Breite $\mathfrak{b}$ daselbst. S. 15.

y Ordinatenbezeichnung. S. 4.

z Gleichmässig vertheilte zufällige Last oder Verkehrslast pro Längeneinheit. S. 87.

α, α' Feste Influenzpunkte, für jede Oeffnung l_m bestimmt durch die Formeln 76, 77. S. 41.

α_x, α_x' Laufende Influenzpunkte für den Querschnitt x. S. 58.

β Bestimmt durch Formel 99. S. 57.

Δ_ν Bestimmt durch Formel 48. S. 23.

η Entfernung von der neutralen Schicht. S. 1.

Θ Trägheitsmoment. S. 2, mit Index S. 22.

$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_{n+1}$ λ-System einer Stütze. S. 36.

μ Maximalmomentenpunkt. S. 9.

ϱ Krümmungsradius. S. 1.

σ, σ' Ausdehnung bezw. Zusammenpressung eines Faserabschnitts von der Länge s_1 in Entfernung 1 von der neutralen Schicht. S. 2.

σ_η, σ_η' Ausdehnung bezw. Zusammenpressung eines Faserabschnitts von der Länge s_1 in Entfernung η von der neutralen Schicht. S. 1.

τ, τ' Tangenten der Neigungswinkel über zwei eine Oeffnung l begränzenden Stützen. S. 4, mit Index S. 8.

φ Richtung irgend einer Schubkraft. S. 14.

φ' Richtung der grössten spezifischen Zug- oder Druckkraft (max X_η). S. 15.

φ'' Richtung der grössten spezifischen Schubkraft (max Y_η). S. 15.

ψ Richtung der grössten spezifischen Zugkraft (max zug X_η). S. 17.

ψ' Richtung der grössten spezifischen Druckkraft (max druck X_η). S. 17.

Verschiedene Summenbezeichnungen.

$\sum_{\eta}^{a}$ Seite 2, 12; $\sum_{r}^{x}$ Seite 5; $\sum_{1}^{z}$ Seite 8; Seite 69.

Druckfehler.

S. 16, Zeile 1 lies um 90^0 statt nur 90^0.
S. 22, 1. Zeile von unten lies Anh. 7 statt Anh. 9;
3. Zeile von unten soll beginnen mit $-\frac{1}{2E\Theta_s}$, statt mit $-\frac{1}{2E\Theta}$;
5. Zeile von unten lies Anh. 6 statt Anh. 7.
S. 30 erhält die 4. Gleichung die Nummer 28_b statt 28_a.
S. 39, Zeile 6 lies $B_m > \frac{49}{4} B_m'$.
S. 43, Formel 78 soll beginnen $D = -6E\Theta$ [—.
S. 48, 3. Zeile von unten lies § 46, Beisp. 6.
S. 95, 5. Zeile von unten lies §§ 53., 55.

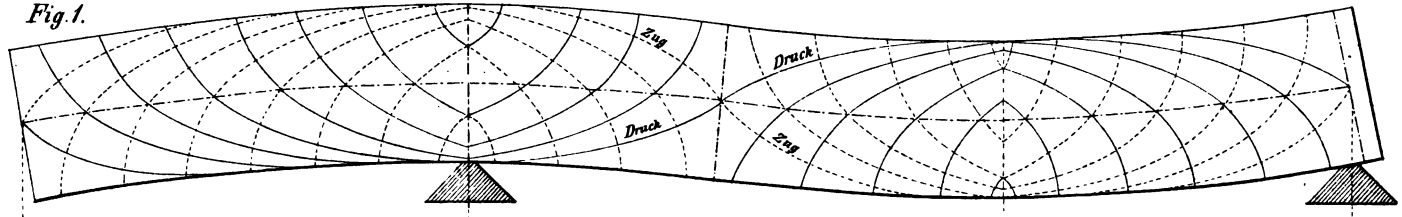
Spannungs Trajectorien

(zu § 11)

Tafel I.

Trajectorien des gröfsten Zugs und Drucks.

Fig. 1.



Halbe Oeffnung eines continuirlichen Trägers
oder halber Träger von § 39.

Träger von § 42.

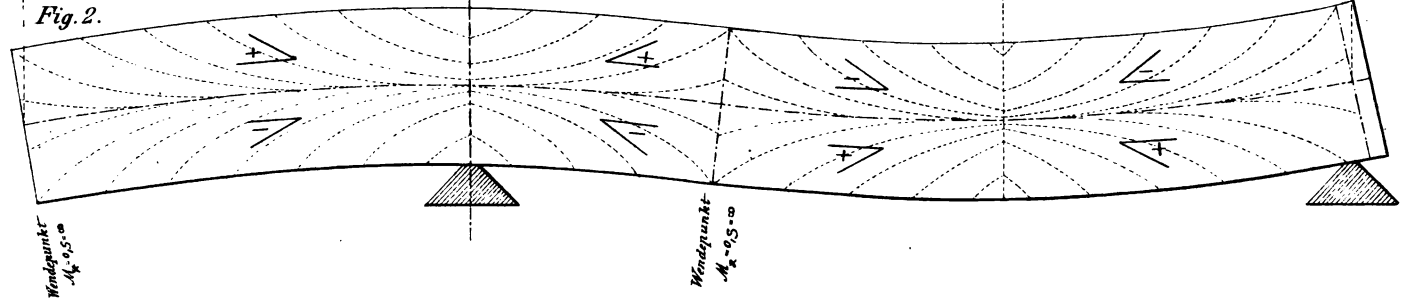
Halber Träger von § 40.

Endöffnung eines continuirlichen Trägers
oder Träger von § 41.

Halber Träger von § 43.

Trajectorien des gröfsten Schubs.

Fig. 2.

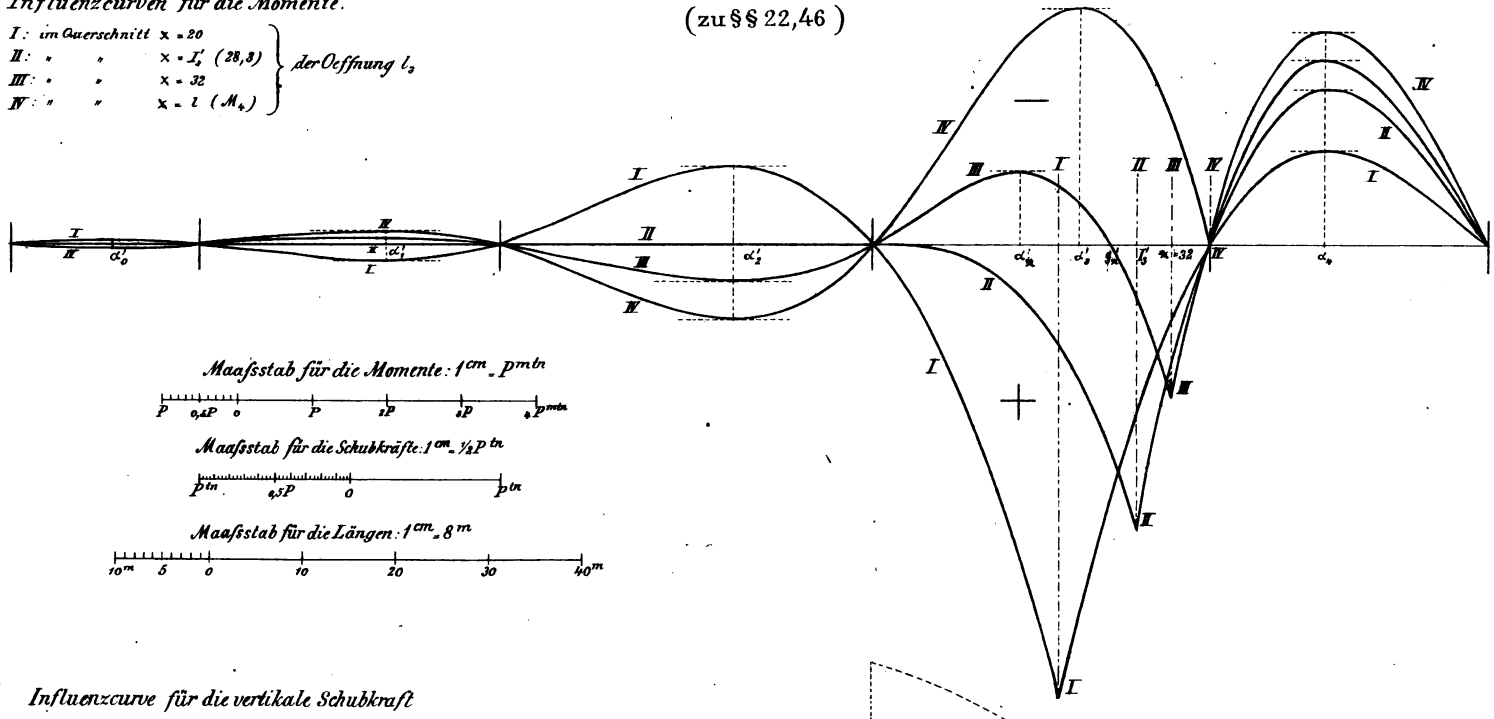


Influenzcurven.

(zu §§ 22,46)

Influenzcurven für die Momente.

I: im Querschnitt x = 20
II: " " x = l_1' (28,8)
III: " " x = 32
IV: " " x = l (M_4)
} der Oeffnung l_3



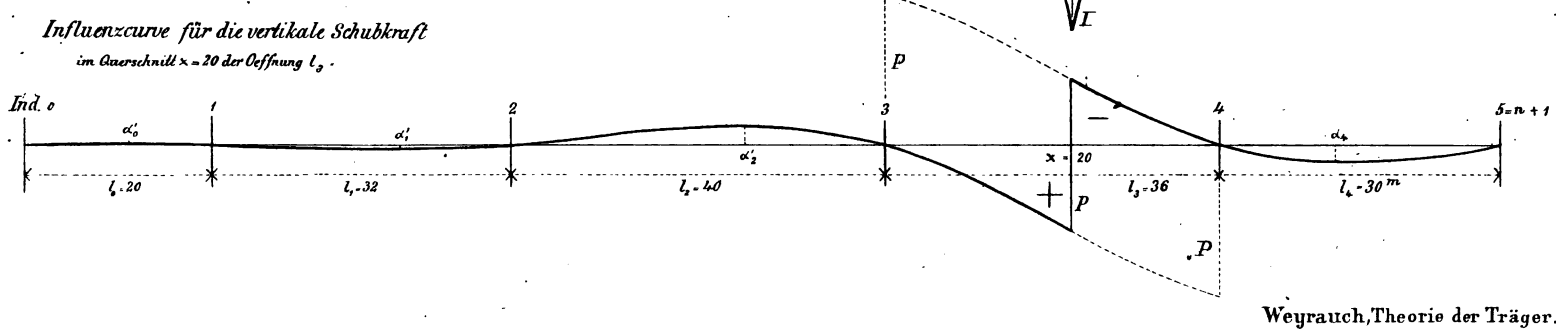
Maafsstab für die Momente: 1 cm = P mtr

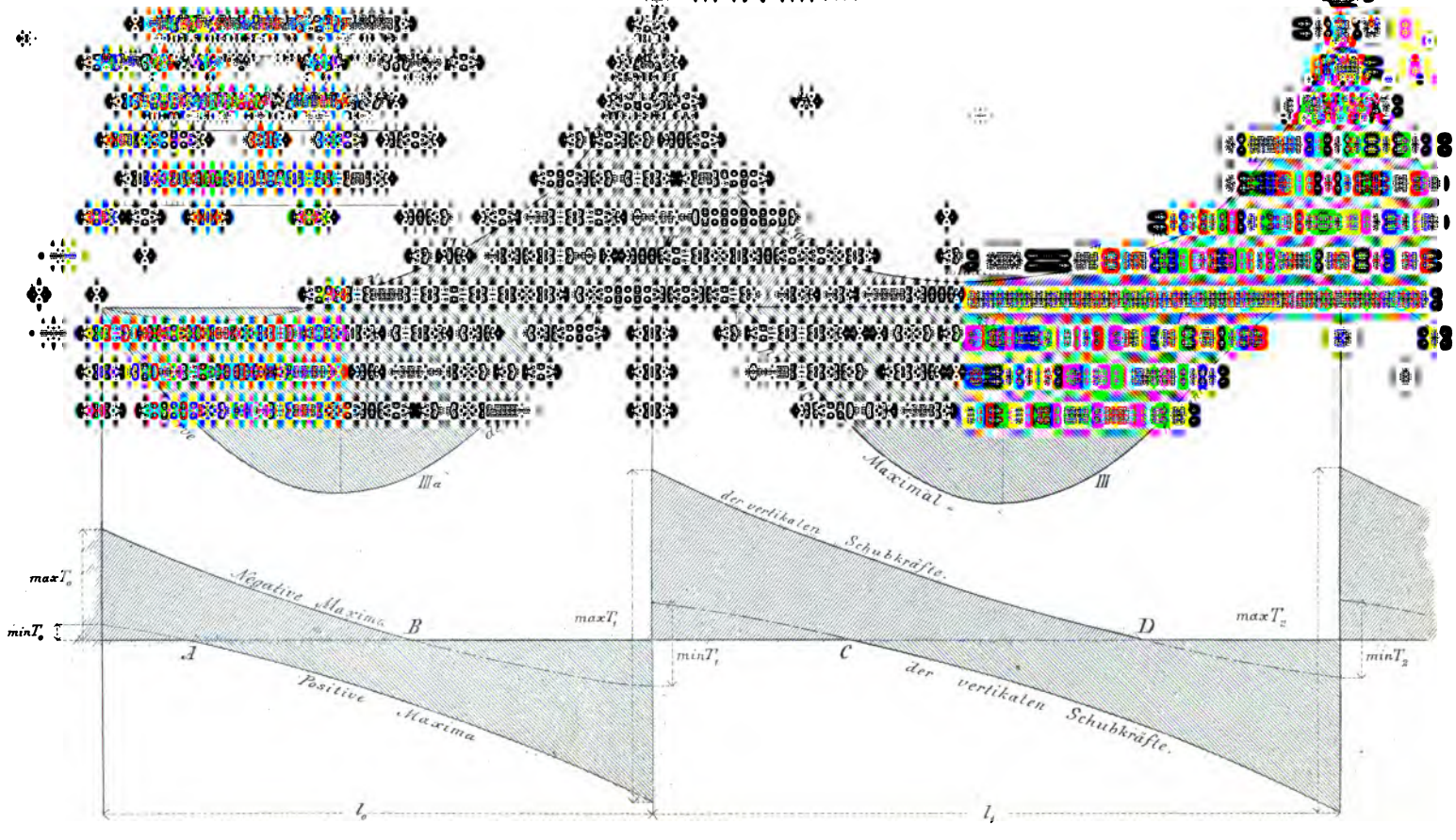
Maafsstab für die Schubkräfte: 1 cm = ½P tr

Maafsstab für die Längen: 1 cm = 8 m

Influenzcurve für die vertikale Schubkraft

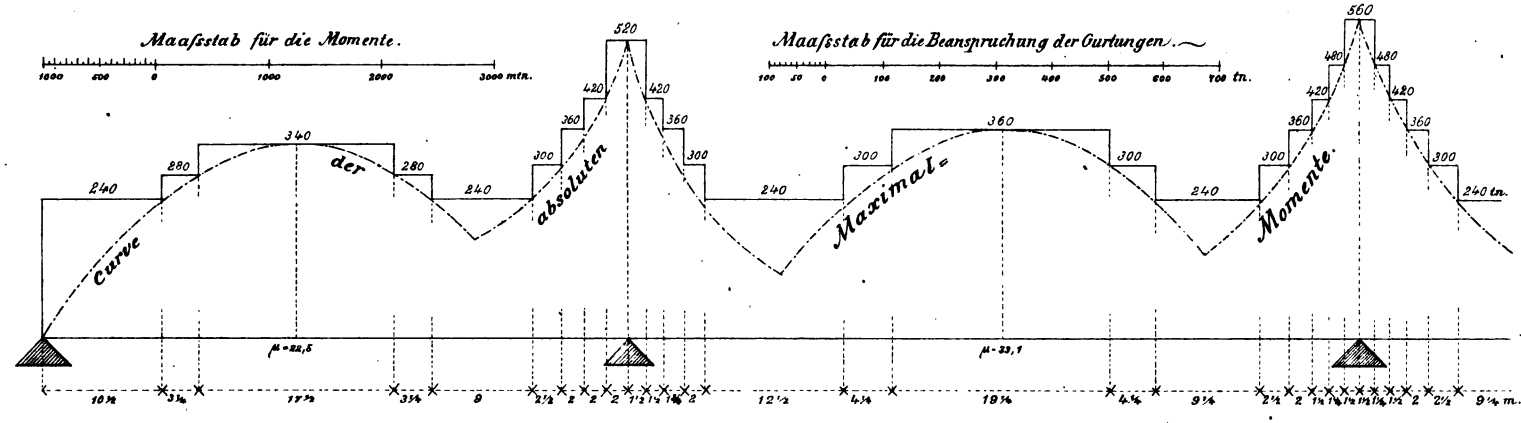
im Querschnitt x = 20 der Oeffnung l_3.




IIIa
Maximal-
III
der vertikalen Schubkräfte.
max T₀
min T₀
Negative Maxima
B
max T₁
D
max T₂
A
min T₁
C
der vertikalen Schubkräfte.
min T₂
Positive Maxima
l₀
l₁

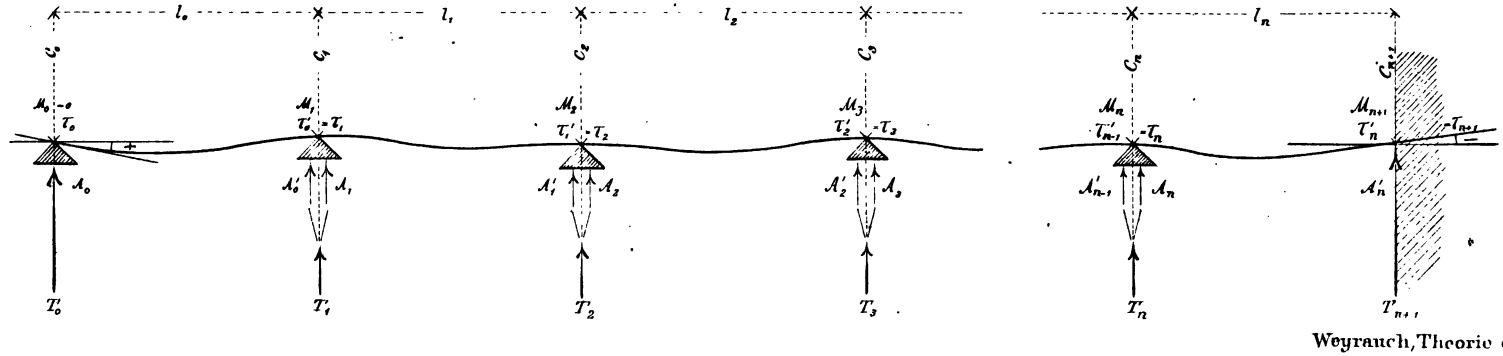
Sprungweise veränderlicher Querschnitt.

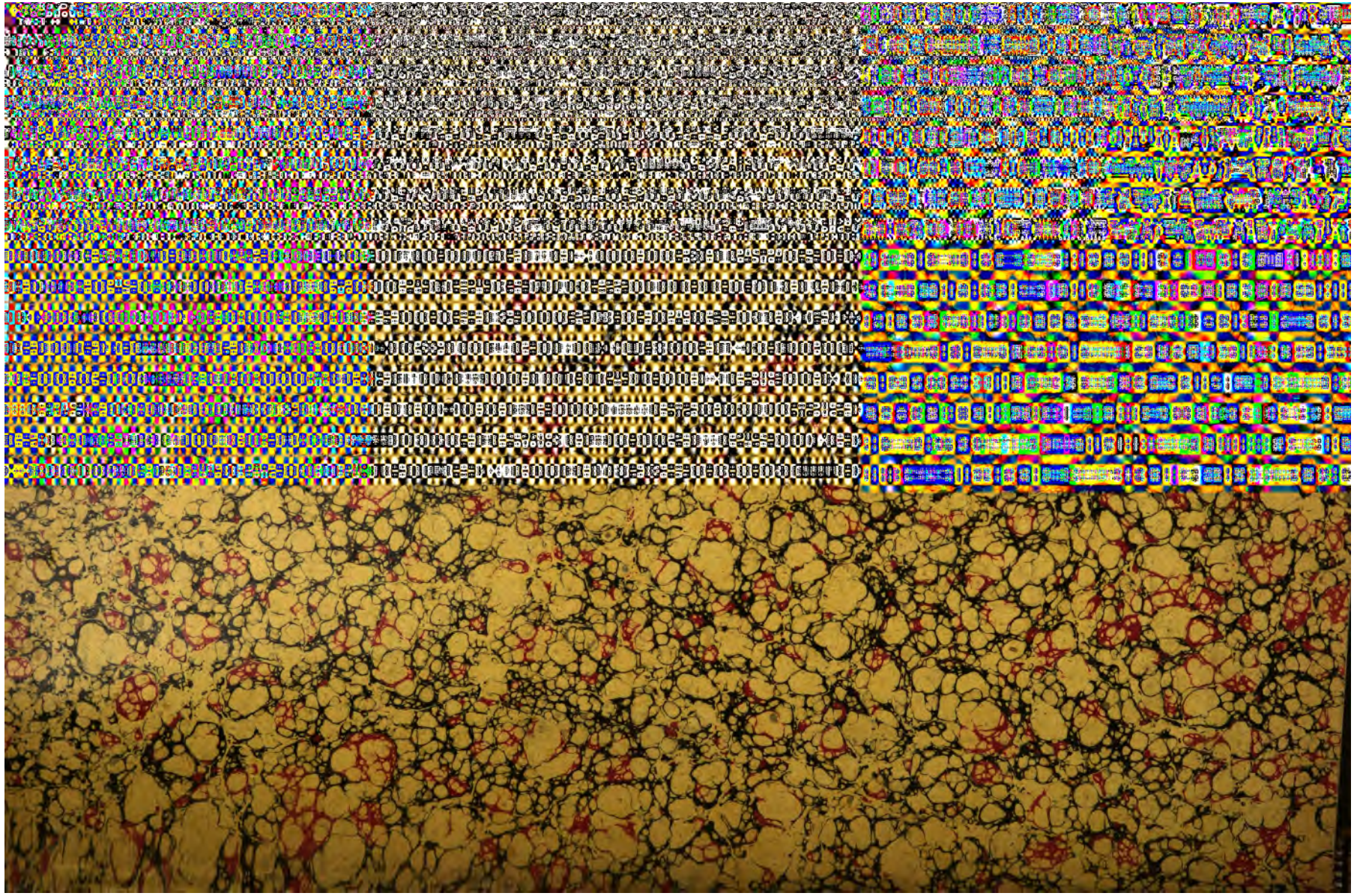
(zu §§ 13, 51)

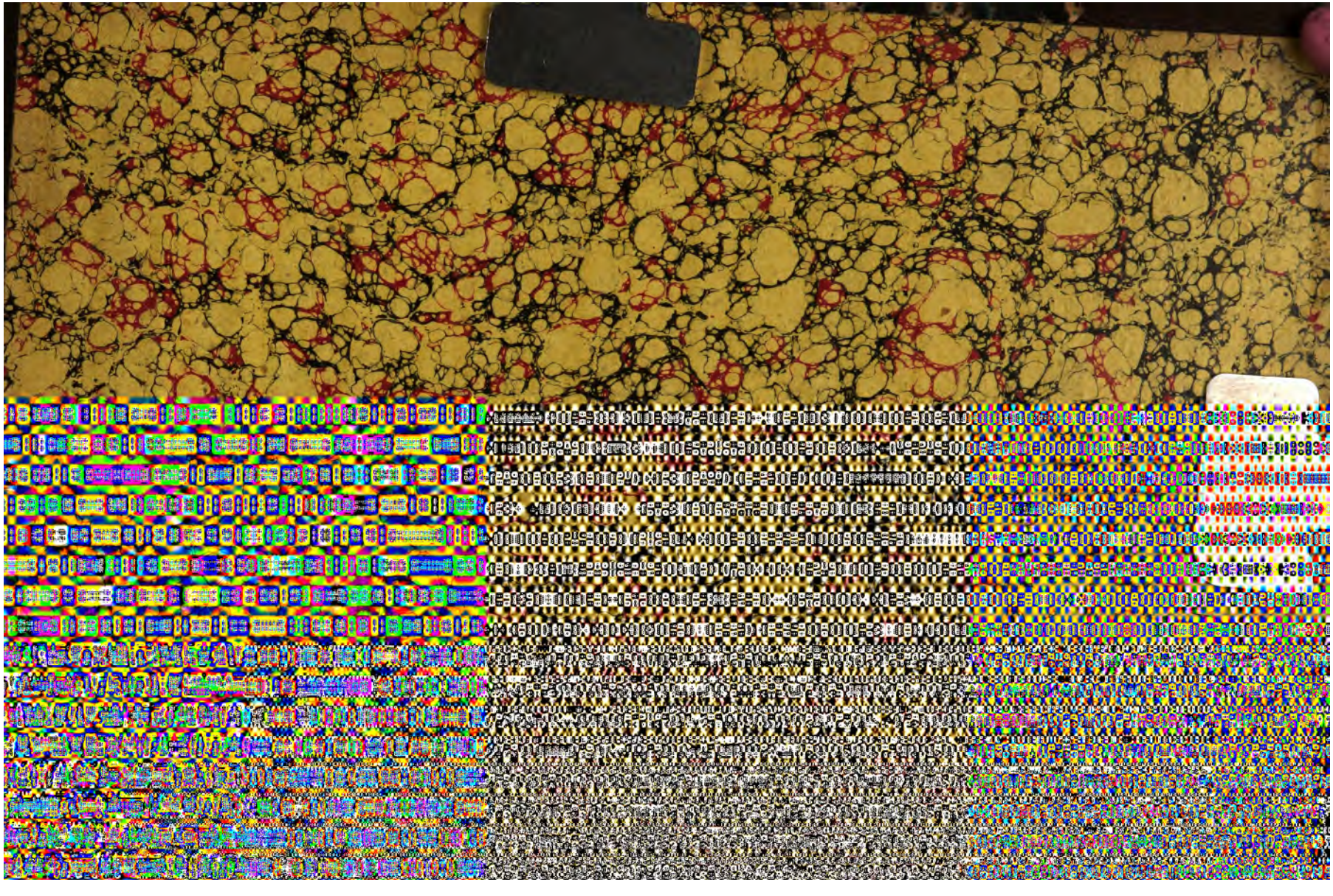


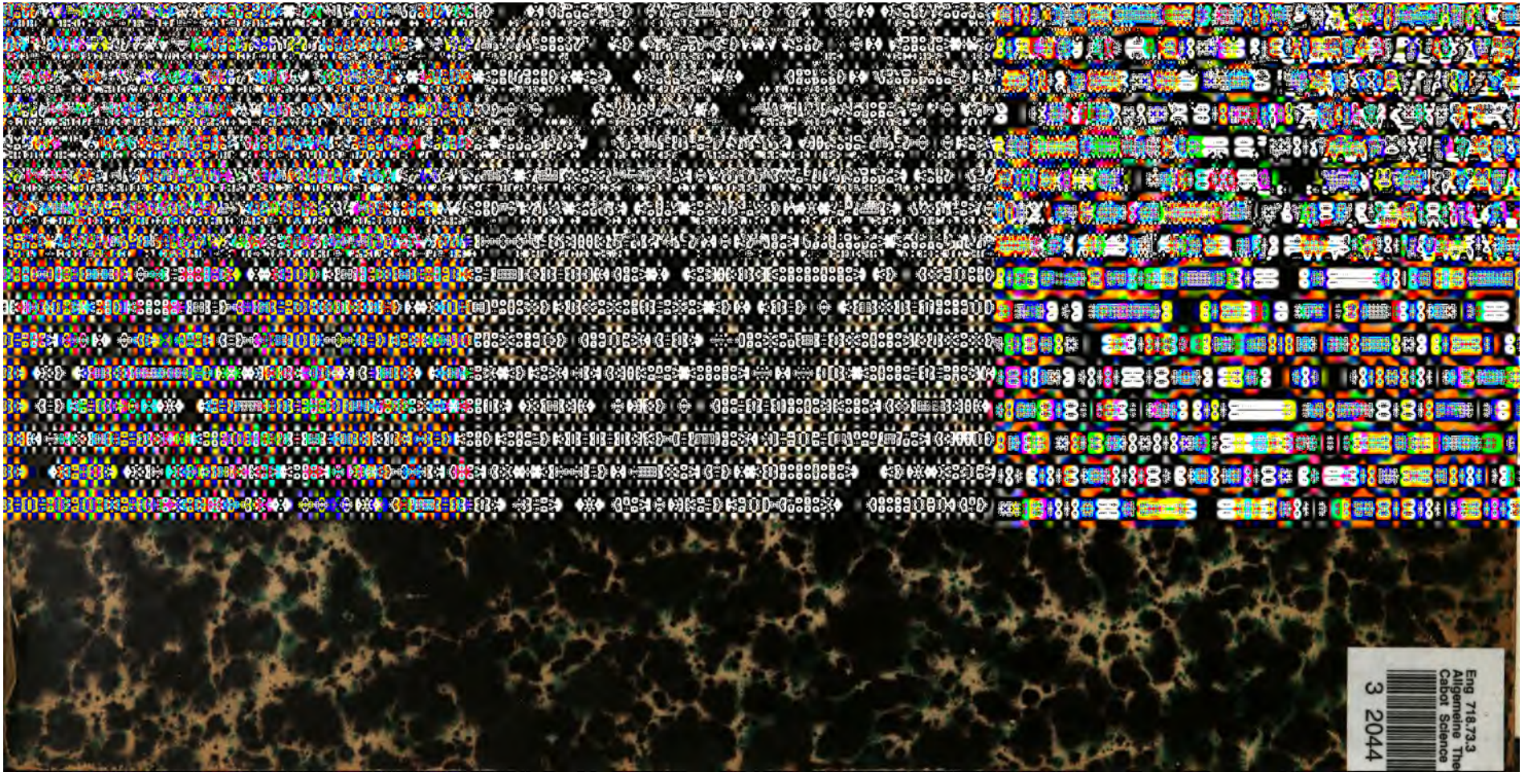
Anordnung der Indices.

(allgemein)








Eng 718.73.3
Allgemeine The
Cabot Science
3 2044